

講演スライドは

[https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/presentation/GW\\_ss2020.pdf](https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/presentation/GW_ss2020.pdf)  
からダウンロードできます。

# 原始重力波

初期宇宙のインフレーションは本当にあったのか？

小松英一郎（マックス・プランク宇宙物理学研究所）

第50回天文・天体物理若手夏の学校, 2020年8月24日

# 講演内容

- 本講演は、アムステルダム大学で行った90分×3回の集中講義を日本語で60分に圧縮してまとめ直したものです。
- より深く学びたい方は、ホームページの「**Lectures & Reviews**」のリンクから集中講義のスライドを取得してください。
- 講演・スライドの内容に関し、夏学のSlackやメールでの質問を歓迎します:  
[komatsu@mpa-garching.mpg.de](mailto:komatsu@mpa-garching.mpg.de)

The screenshot shows the homepage of Eiichiro Komatsu. At the top, it displays his name, title as Director of the Department of Physical Cosmology at Max-Planck-Institut für Astrophysik, Germany, and a background image of a galaxy map. Below the header is a navigation bar with links: HOME, CRL, CODES, LECTURES & REVIEWS (which is highlighted with a red oval and a red arrow pointing from the previous slide), TALKS, PUBLICATIONS, CURRICULUM VITAE (CV), 新聞・雑誌, 日本語の出版物, and OLD HOME PAGE. The 'LECTURES & REVIEWS' section is titled 'Lectures & Reviews' and contains two main sections: '2020' and '2019'. The '2020' section includes a link to 'Lecture Slides: "Some tips for faculty, grant, and fellowship applications"'. The '2019' section is highlighted with a large red rectangle and contains three entries: 'Lecture Slides: "Primordial Gravitational Waves from Inflation" [3 x 90 min]', 'Lecture 1 (PDF 6.8MB; last updated, March 22, 2020)', and 'Lecture 2 (PDF 15.9MB; last updated, March 5, 2020)'. The 'Lecture 3' entry is partially visible.

# 講演内容

- スペインのサンタンデルで行った、修士の学生向けの65分間の講義の動画もあります
- 宇宙背景放射の講義スライドと動画(90分x3回)も置いてあります。
- 講演・スライドの内容に関し、夏学のSlackやメールでの質問を歓迎します: [komatsu@mpa-garching.mpg.de](mailto:komatsu@mpa-garching.mpg.de)

- ▶ **Lecture Slides: "Primordial Gravitational Waves from Inflation" [3 x 90 min]**
  - ▶ University of Amsterdam; February 27, March 5 and 19, 2020
  - ▶ [Lecture 1](#) (PDF 6.8MB; last updated, March 22, 2020)
    - ▶ Primordial gravitational waves from the vacuum fluctuation
  - ▶ [Lecture 2](#) (PDF 15.9MB; last updated, March 5, 2020)
    - ▶ Polarisation of the cosmic microwave background
  - ▶ [Lecture 3](#) (PDF 9MB; last updated, March 24, 2020)
    - ▶ Primordial gravitational waves from the sourced contribution

2019

- ▶ **Lecture Slides: "Gravitational waves from the early Universe" [65 min]**
  - ▶ Lecture at the "Frontier Research in Astrophysics and Particle Physics" seminar series for master students at Instituto de Física de Cantabria, Santander, Spain; June 4, 2019
  - ▶ [GWlecture\\_santander.pdf](#) (12.5MB) [video](#)

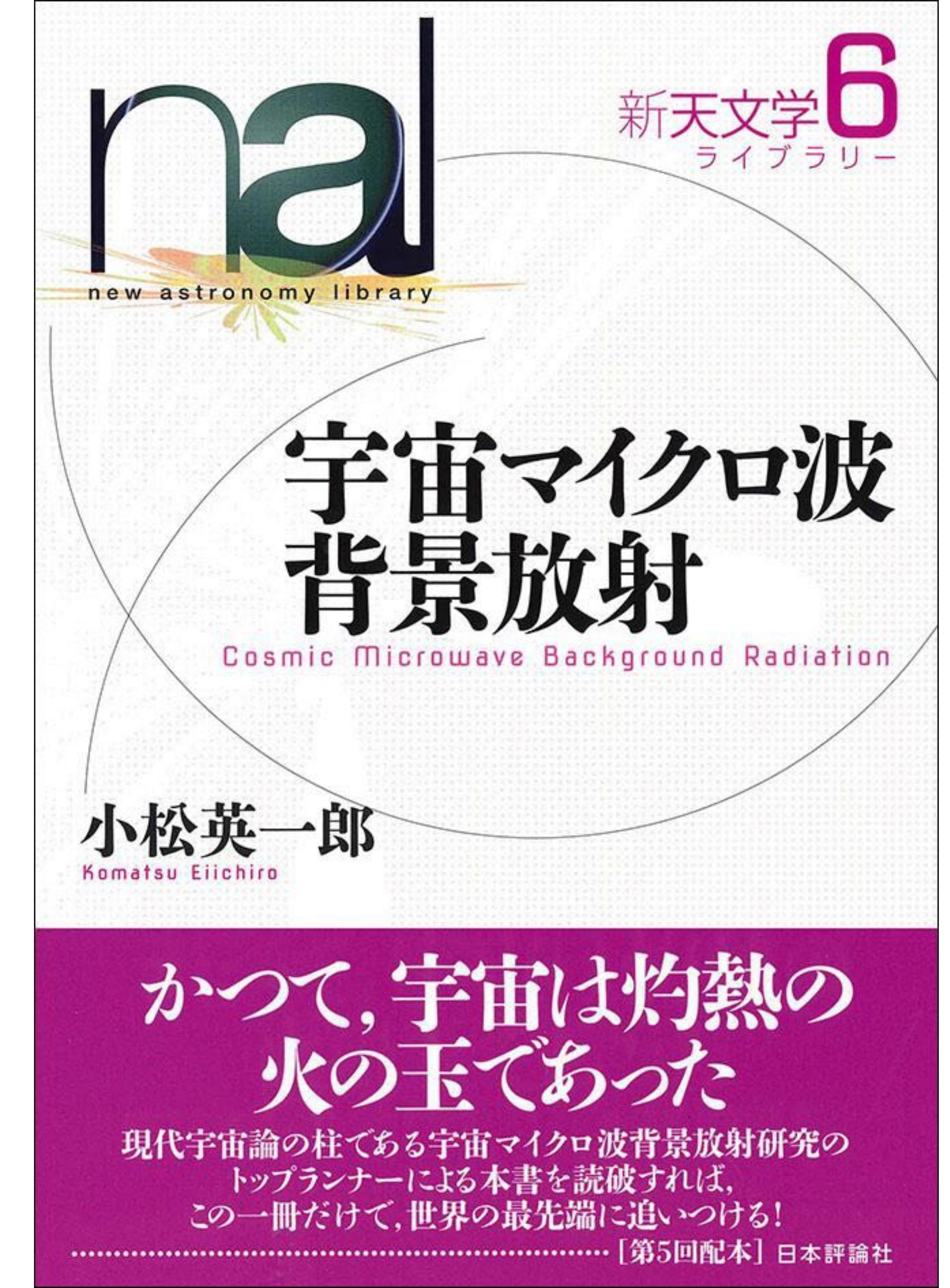
2018

- ▶ **Lecture Slides: "Physics of CMB Anisotropies" [3 x 90 min]**
  - ▶ [Cours d'automne du LAL](#), Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire; October 15-17, 2018
  - ▶ [Lecture 1 \[video\]](#) (PDF 13.9MB; last updated, October 17, 2018)
    - ▶ Brief introduction of the CMB research
    - ▶ Temperature anisotropy from gravitational effects
    - ▶ Power spectrum basics
  - ▶ [Lecture 2](#) (PDF 8.4MB; last updated, October 17, 2018)
    - ▶ [due to the absence of IT person at LAL on Oct 16, no video is available unfortunately]
      - ▶ Power spectrum of gravitational anisotropy
      - ▶ Temperature anisotropy from sound waves
  - ▶ [Lecture 3 \[video\]](#) (PDF 11.6MB; last updated, October 17, 2018)
    - ▶ Cosmological parameter dependence of the temperature power spectrum
    - ▶ Polarisation of the CMB
    - ▶ Gravitational waves and their imprints on the CMB

# 参考書

## 宇宙マイクロ波背景放射（日本評論社）

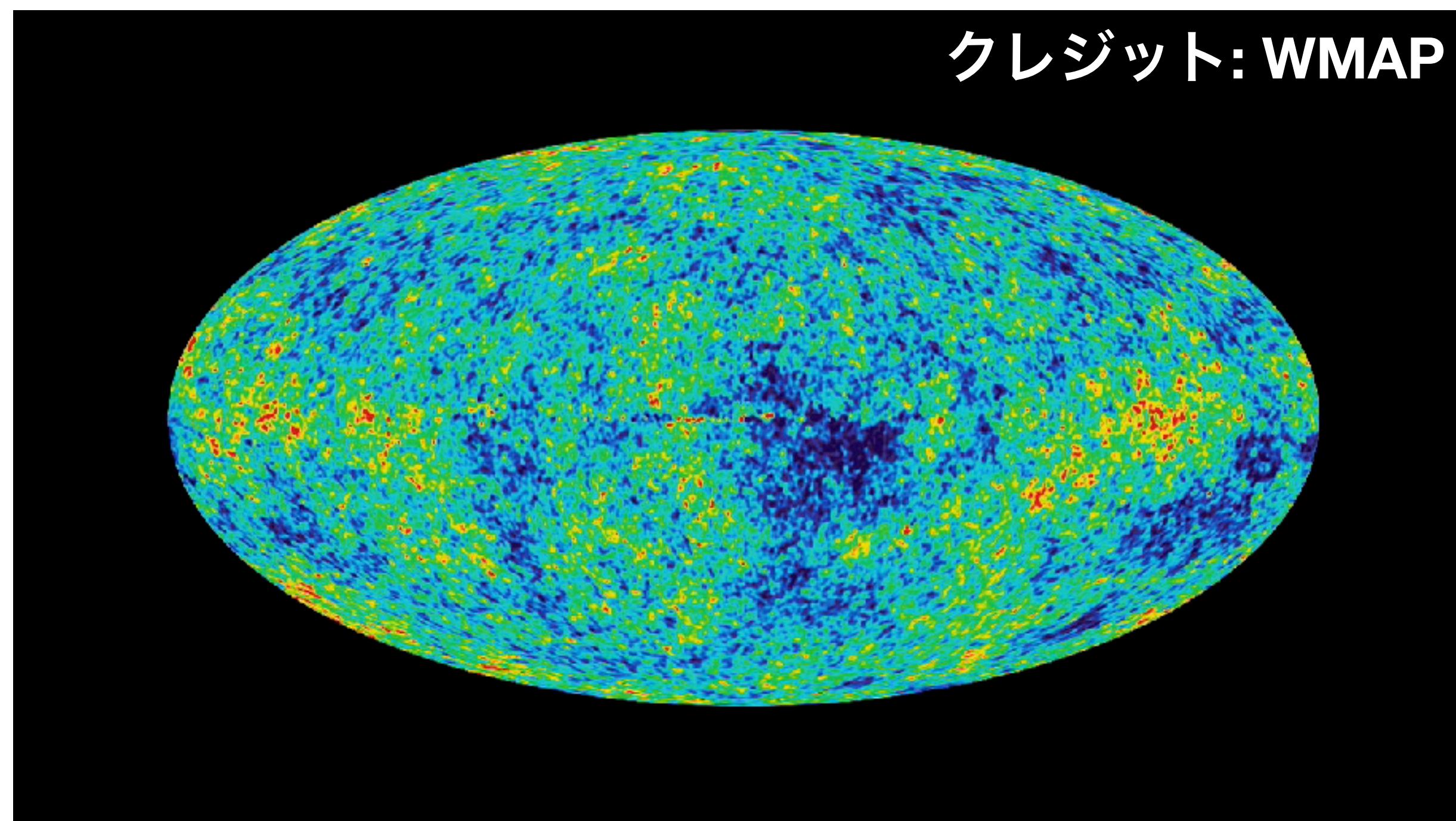
- ・ 宇宙論の基礎と宇宙マイクロ波背景放射の物理を、この一冊で習得できます。
- ・ Kindle版もあります。
- ・ 原始重力波の記述は第12章です。
- ・ **おすすめ**：「はじめに」、「終章」、「コラム」を読むだけでも楽しめると思います。



なぜ、原始重力波？

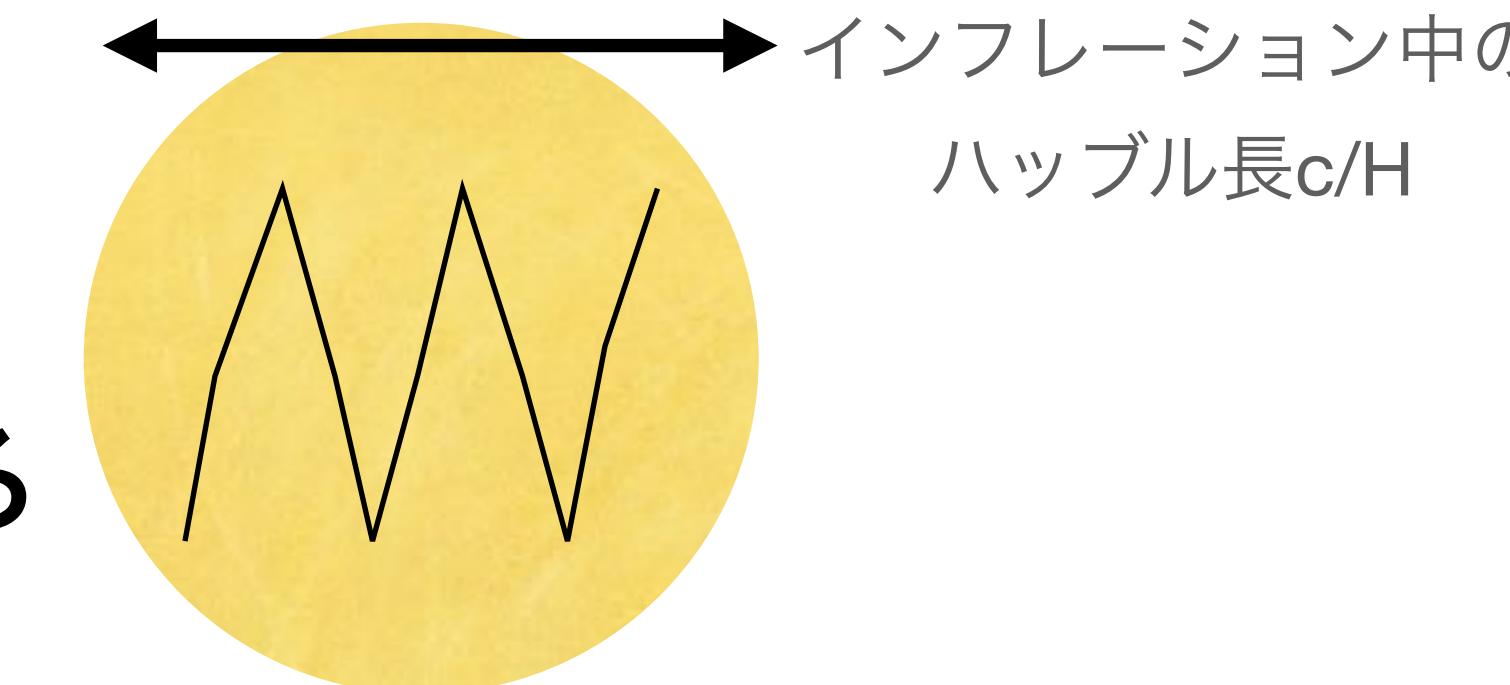
# インフレーション理論の途方もない主張

- ・銀河、星、惑星、ひいては生命などの、宇宙に存在する構造の全ての起源は、初期宇宙に発生した量子力学的な揺らぎである。
- ・ほんまかいな？



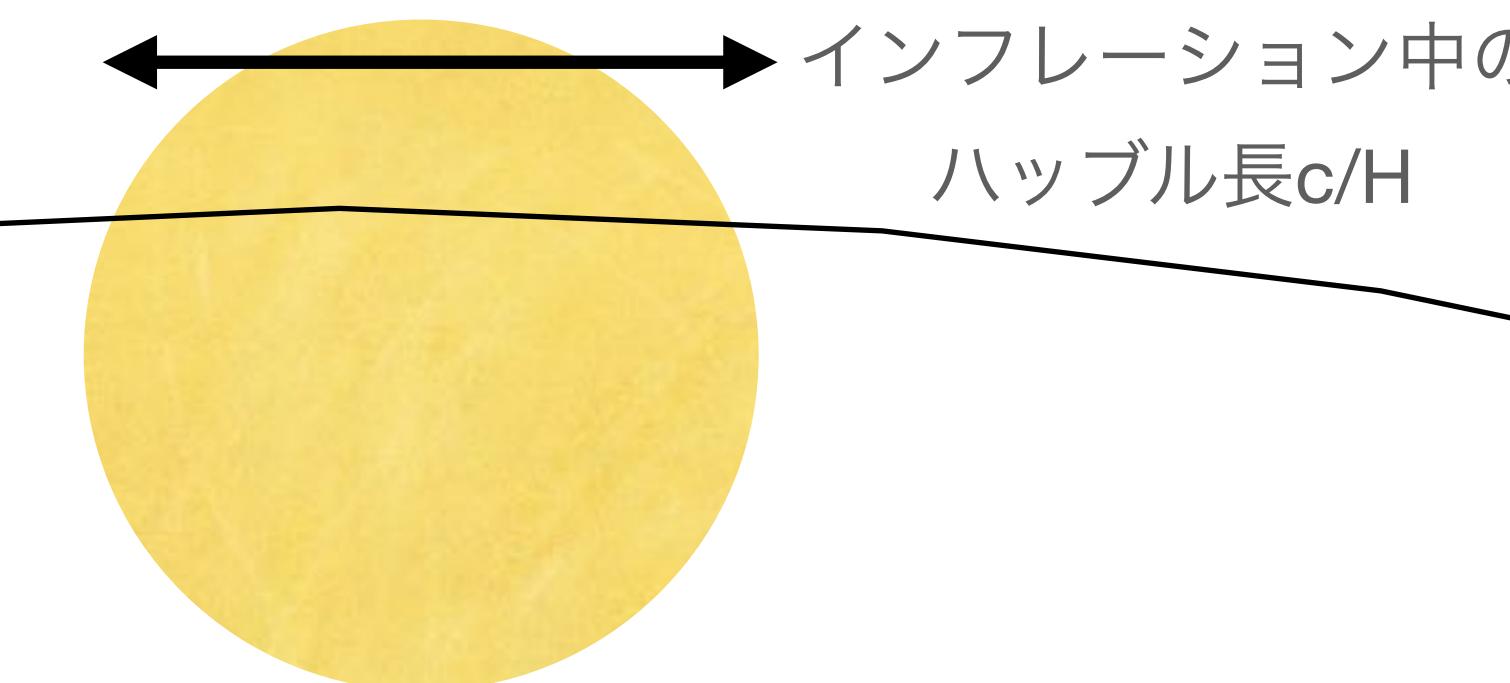
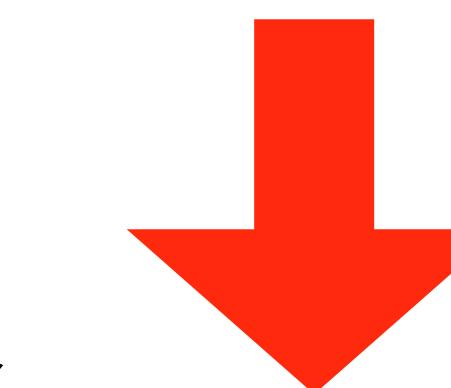
# インフレーション

極微のスケールで、短波長の  
量子力学的揺らぎが生成される



インフレーション中の  
ハッブル長 $c/H$

# 指数関数的膨張



インフレーション中の  
ハッブル長 $c/H$

- 指数関数的な空間の広がりにより、揺らぎの波長が  
引き延ばされて、マクロスコピックな揺らぎとなる

# インフレーション理論の観測的検証

「宇宙開闢まもない $10^{-36}$ 秒間に、空間が $10^{26}$ 倍に広がった」という主張

- 途方もない主張だが、最も単純な、单一のスカラー場に基づくインフレーションモデルの予言は、宇宙マイクロ波背景放射の温度異方性と偏光の観測結果を説明する。僕はこれまで、研究人生のほとんどをインフレーション理論の検証に費やしてきた（カブリIPMUニュース Vol.41, 2018年3月号）。これまでに確認できた予言は（括弧は、参考書の該当する節を示す）
  - 断熱揺らぎ（5.4節）
  - スカラー型揺らぎのスケール不変性のわずかな破れ（6.3.4節）
  - スカラー型揺らぎの確率密度関数はガウス分布（7.2節）
  - スカラー型揺らぎの統計的等方性（7.3.3節）
  - ハップル長を超える長波長揺らぎの存在（11.4.2節）

# 「最後の一歩」

[https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/presentation/  
asj hayashi prize.pdf](https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/presentation/asj_hayashi_prize.pdf)

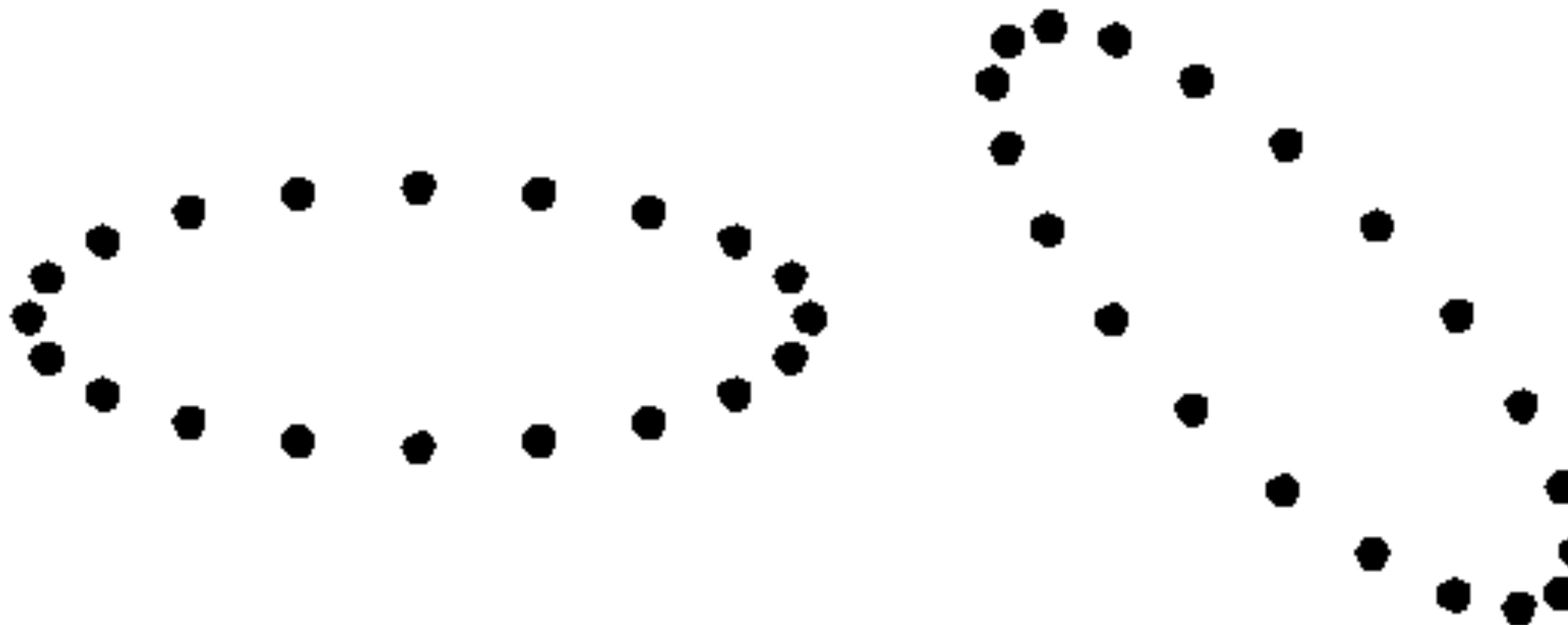
## インフレーション理論の決定的な証拠を求めて

- ・ インフレーションは本当に起こったのか？
- ・ 個人的には、証拠は十分だと思う。しかし、インフレーション理論の途方もない主張には、途方もない証拠が必要 (*Extraordinary claims require extraordinary evidence, Carl Sagan*) なのかも知れない。
- ・ その「途方もない証拠」となりうるのが、インフレーション中に生成されたと予言される、**原始重力波**である。
- ・ インフレーション理論の予言の中で、原始重力波だけがまだ見つかっていない。すでに見つかっていてもおかしくなったのだが... (カブリIPMUニュース Vol.41, 2018年3月号)

# 重力波の基礎事項

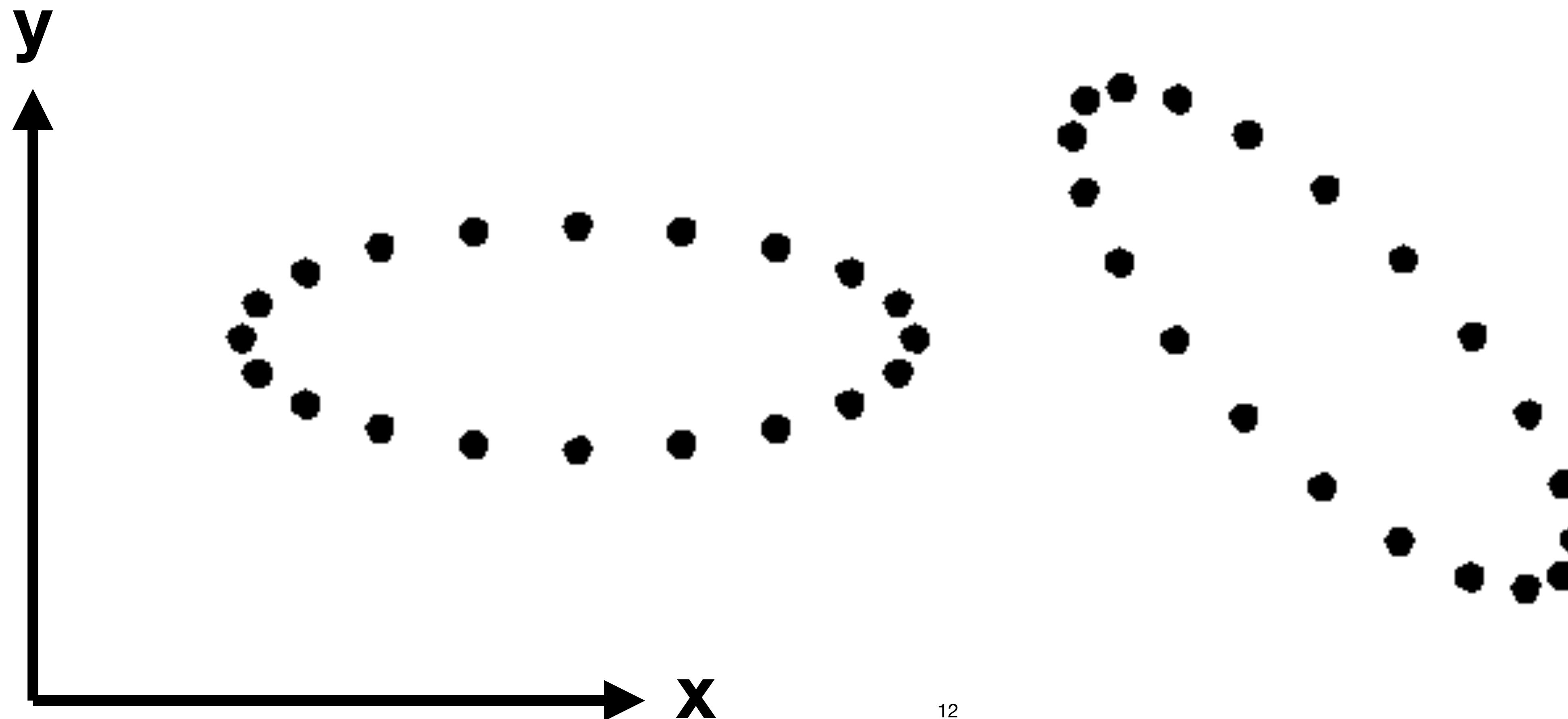
# 重力波がやってきた！

空間の歪みを可視化するには、テスト粒子をばら撒き、粒子間の距離を見れば良い



# 重力波がやってきた！

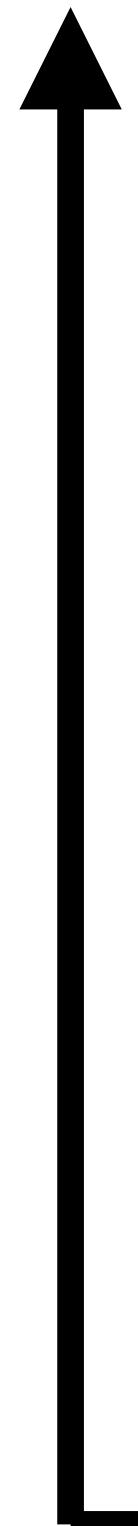
重力波は、粒子間の距離を、面積を保ったまま変化させる空間の歪み



# 二点間の距離

- デカルト座標を用い、歪んでいない空間での二点間の距離を書けば、

y



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- 後そのため、宇宙膨張を考慮すれば

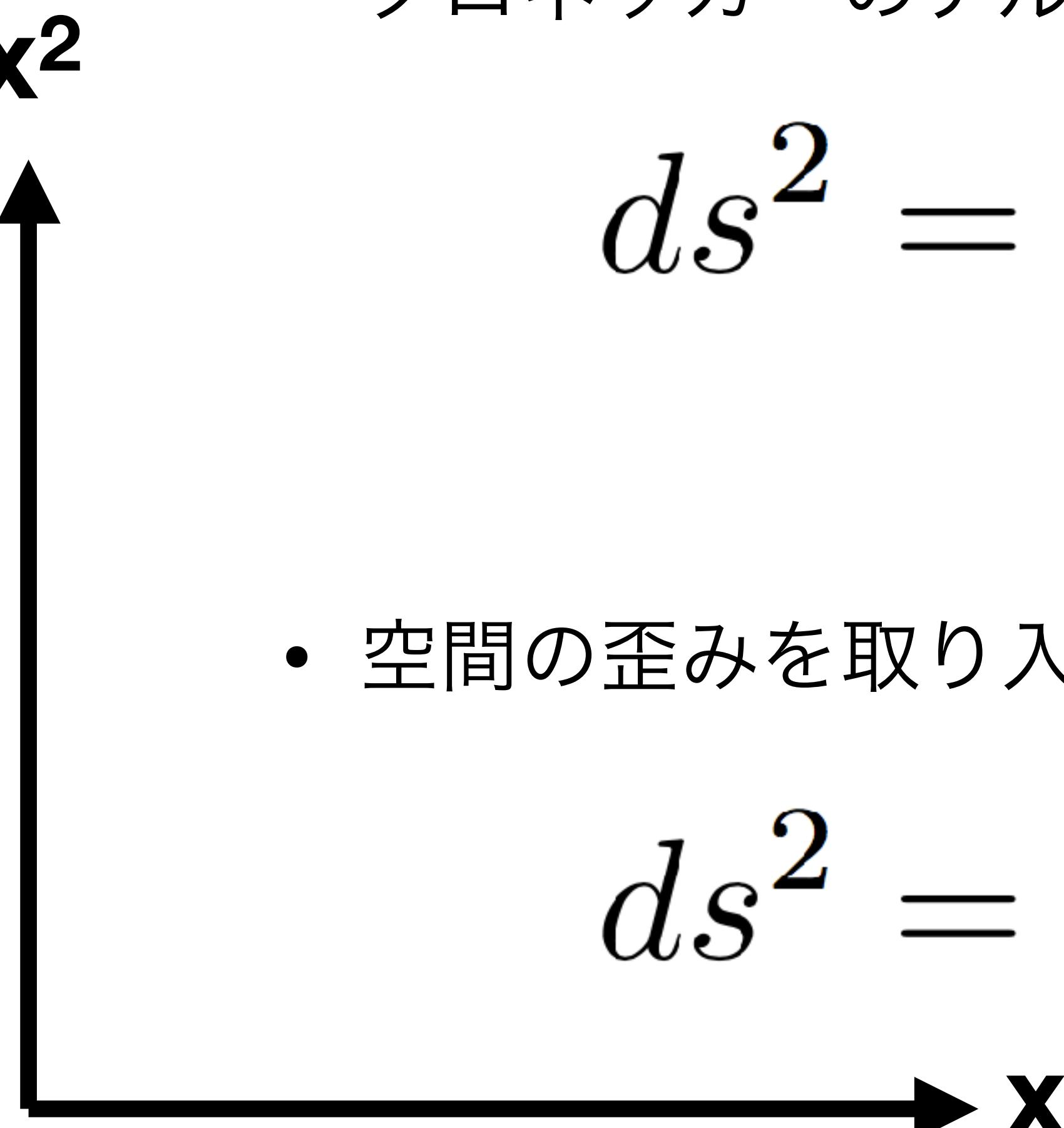
$$ds^2 = \boxed{a^2(t)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

スケールファクター

x

# 空間の歪み

- クロネッカーのデルタ記号を使ってコンパクトに書けば


$$ds^2 = a^2(t) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j$$

$x = (x, y, z)$   
 $i=j$ なら  $\delta_{ij} = 1$ ;  
それ以外は  $\delta_{ij} = 0$

- 空間の歪みを取り入れれば

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

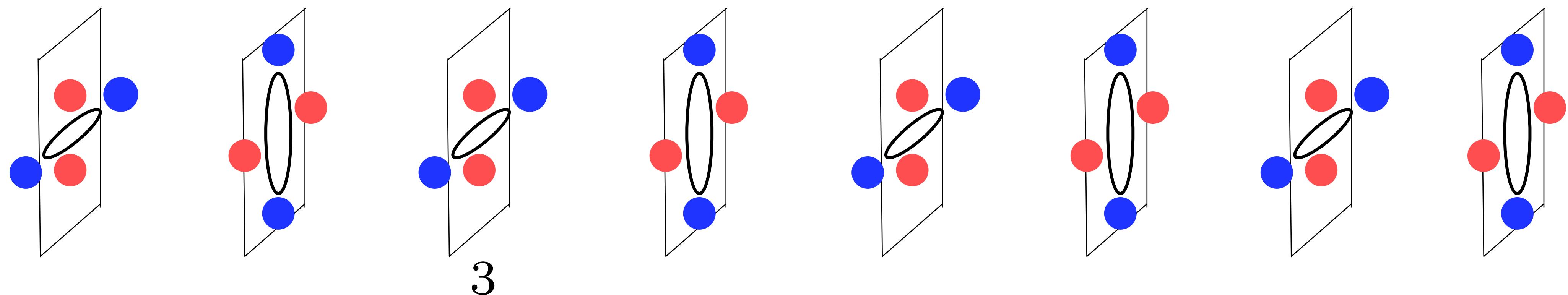
空間の歪み !

# 重力波が重力波であるための、4つの条件

- 重力波は横波でなければならない。

- 空間が歪む方向は、重力波の進行方向に垂直

重力波の進行方向  $\vec{k}$



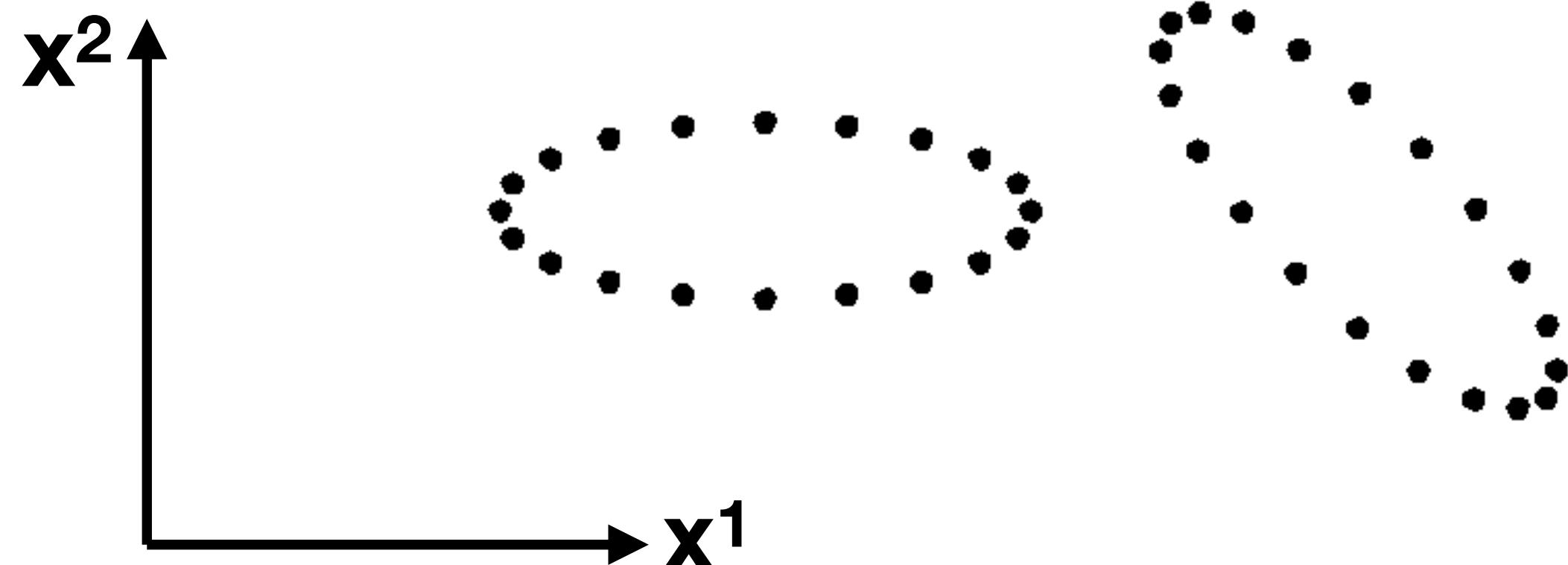
すなわち、
$$\sum_{i=1}^3 k^i h_{ij} = 0$$

$h_{ij}$ の成分に3つの条件

# 重力波が重力波であるための、4つの条件

- 重力波は面積を変えない。
- $\delta_{ij}+h_{ij}$ の行列式は1に等しい

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$



すなわち、 $\sum_{i=1}^3 h_{ii} = 0$

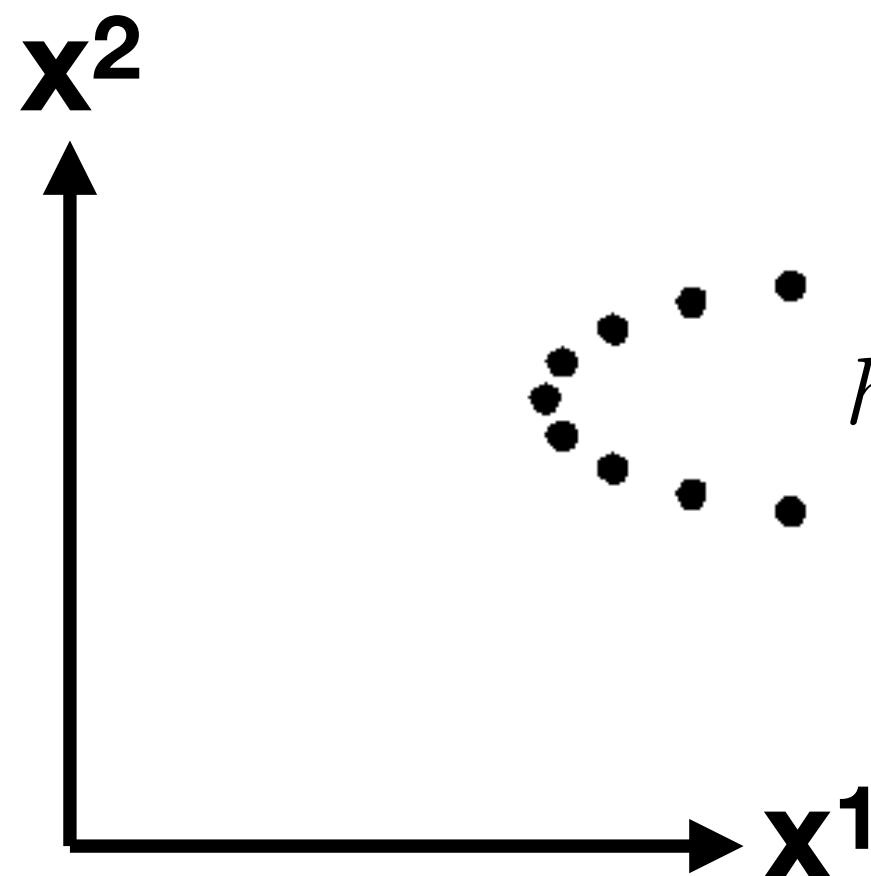
$h_{ij}$ の成分に1つの条件

# 重力波の自由度は2つ

プラス・モードと、クロス・モード

- 対称行列  $h_{ij}$  は 6 つの成分を持つが、4 つの条件が課されるため、自由度の数は 2
- もし重力波が  $z$  軸方向 ( $x^3 = z$ ) に進むとすれば、 $h_{ij}$  の成分は

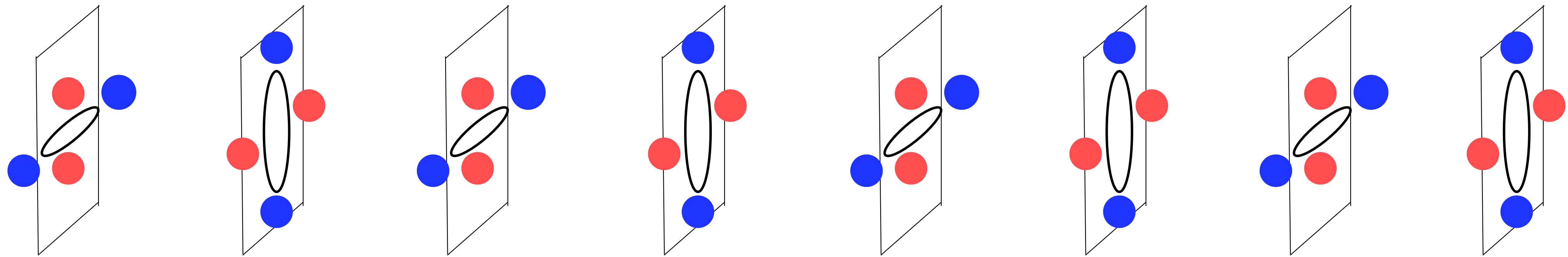
$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と書ける。}$$



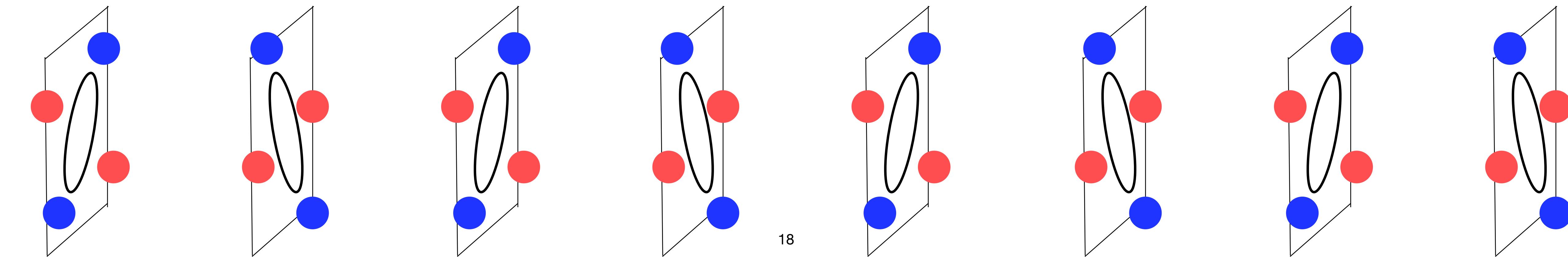
重力波の進行方向  $\vec{k}$

$z$

$$h_+ = \cos(kz)$$



$$h_x = \cos(kz)$$



# 重力波の運動方程式

## AINSHU-TAIN 方程式

- AINSHU-TAIN 方程式に、空間の歪みを含めた二点間の距離

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

を代入し、横波条件と面積を変えない条件を課せば、2回微分の運動方程式（波動方程式）を得る。

$$a^2 \square h_{ij} = -16\pi G T_{ij}^{GW}$$

重力波の源を与える  
「エネルギー・運動量テンソル」

# 重力波の運動方程式

## AINSHU-TAIN 方程式

- AINSHU-TAIN 方程式に、空間の歪みを含めた二点間の距離

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

を代入し、横波条件と面積を変えない条件を課せば、2回微分の運動方程式（波動方程式）を得る。

$$a^2 \square h_{ij} = -16\pi G T_{ij}^{GW}$$

宇宙膨張がない場合は、

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

# 重力波の運動方程式

## AINSHU-TAIN 方程式

- AINSHU-TAIN 方程式に、空間の歪みを含めた二点間の距離

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

を代入し、横波条件と面積を変えない条件を課せば、2回微分の運動方程式（波動方程式）を得る。

$$a^2 \square h_{ij} = -16\pi G T_{ij}^{GW}$$

宇宙膨張がある場合は、

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \boxed{-3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial}{\partial t}} + \frac{1}{a^2} \nabla^2$$

# 重力波の運動方程式

## AINSHUTAIN方程式

- AINSHUTAIN方程式に、空間の歪みを含めた二点間の距離

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j$$

を代入し、横波条件と面積を変えない条件を課せば、2回微分の運動方程式（波動方程式）を得る。

$$a^2 \square h_{ij} = -16\pi G T_{ij}^{GW}$$

宇宙膨張がある場合は、

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\dot{a}\frac{\partial}{a\partial t} - \frac{k^2}{a^2}$$

フーリエ空間

$$\nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

# 膨張宇宙における重力波の運動方程式

## フーリエ空間

$$\ddot{h}_{ij} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{h}_{ij} + \frac{k^2}{a^2}h_{ij} = 16\pi G \underline{\pi_{ij}^{GW}}$$

$T_{ij} = a^2 \pi_{ij}$   
を定義した

- ・一般相対性理論の範囲内で重力波の研究をするなら、この方程式一本で足りる。
- ・あとは、必要な $a(t)$ と $\pi_{ij}(k,t)$ を与えれば良いわけだが、これらの量に何を仮定するかで様々な結果が得られる。それが論文のネタとなる。
- ・この方程式の解き方は、アムステルダム大学の集中講義1日目のスライドを参照。

# 真空の量子力学的な揺らぎ

$$T_{ij} = a^2 \pi_{ij}$$

$$\ddot{h}_{ij} + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} + \frac{k^2}{a^2} h_{ij} = 16\pi G \underline{\pi_{ij}^{GW}}$$

を定義した

- 従来、重力波を生成するには、源となるエネルギー・運動量テンソルが必要である。
- しかしインフレーション中では、**真空中 $\pi_{ij}(k,t)=0$ であっても量子力学的な揺らぎによって重力波が生成される** [Grishchuk (1974); Starobinsky (1979)]
- インフレーションにより、重力波の波長は指数関数的に引き延ばされ、現在、数十億光年にもなる長波長の原始重力波が生成される。これを何とかして観測したい！

# 原始重力波のエネルギー密度

$$\begin{aligned}\rho_{\text{GW}}(t) &= \frac{1}{4} M_{\text{pl}}^2 \sum_{ij} \langle \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \rangle & M_{\text{pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \sum_{\lambda=+,\times} \langle \dot{h}_\lambda^2(t, \mathbf{x}) \rangle\end{aligned}$$

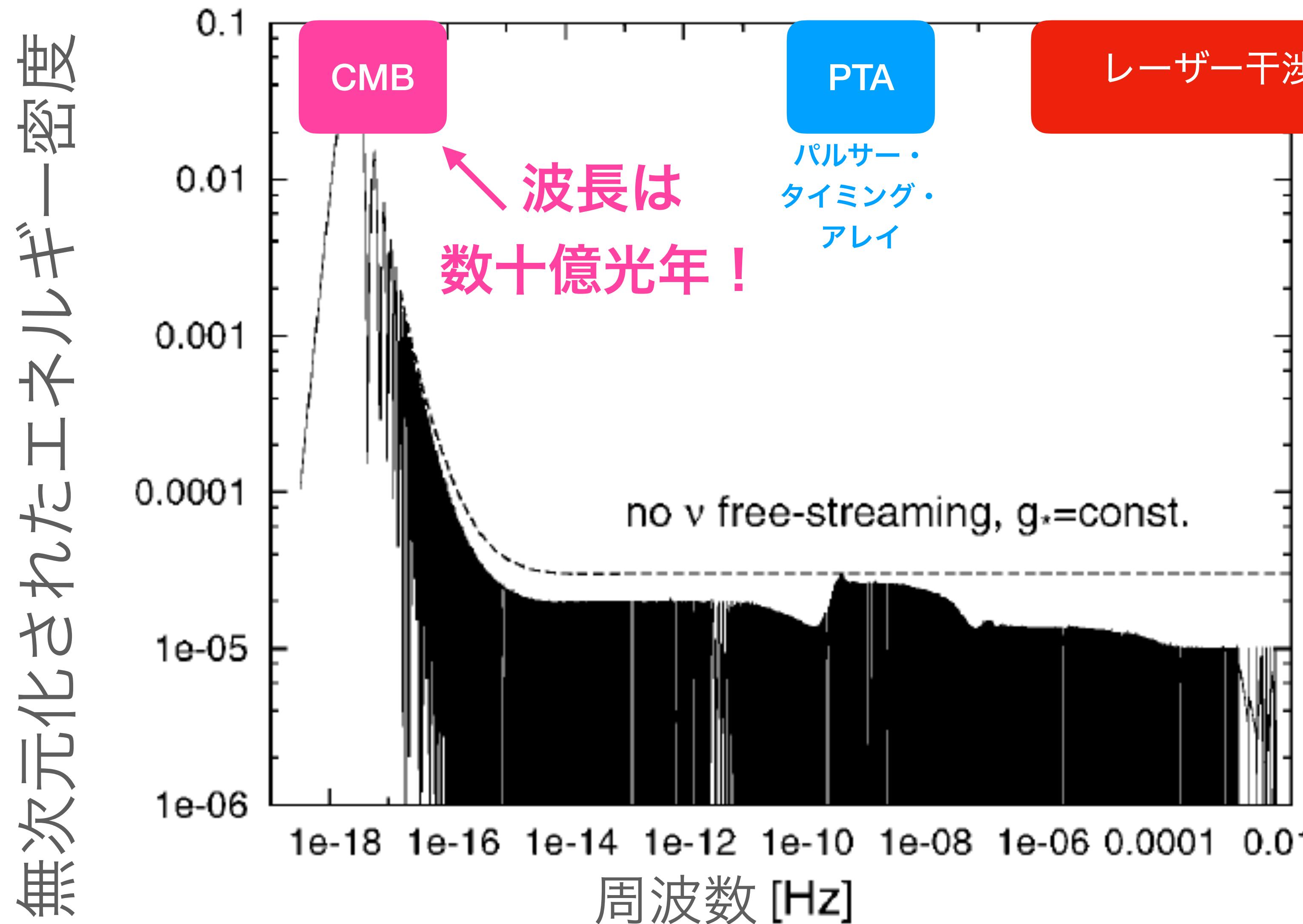
- 運動方程式より、

$$\dot{h}_{ij} \propto a^{-2}(t) \rightarrow \rho_{\text{GW}}(t) \propto a^{-4}(t)$$

重力波のエネルギー密度は、  
相対論的粒子（放射）のように赤方偏移する

# 原始重力波のエネルギー密度スペクトル

## 真空の量子揺らぎによる寄与の理論的予想



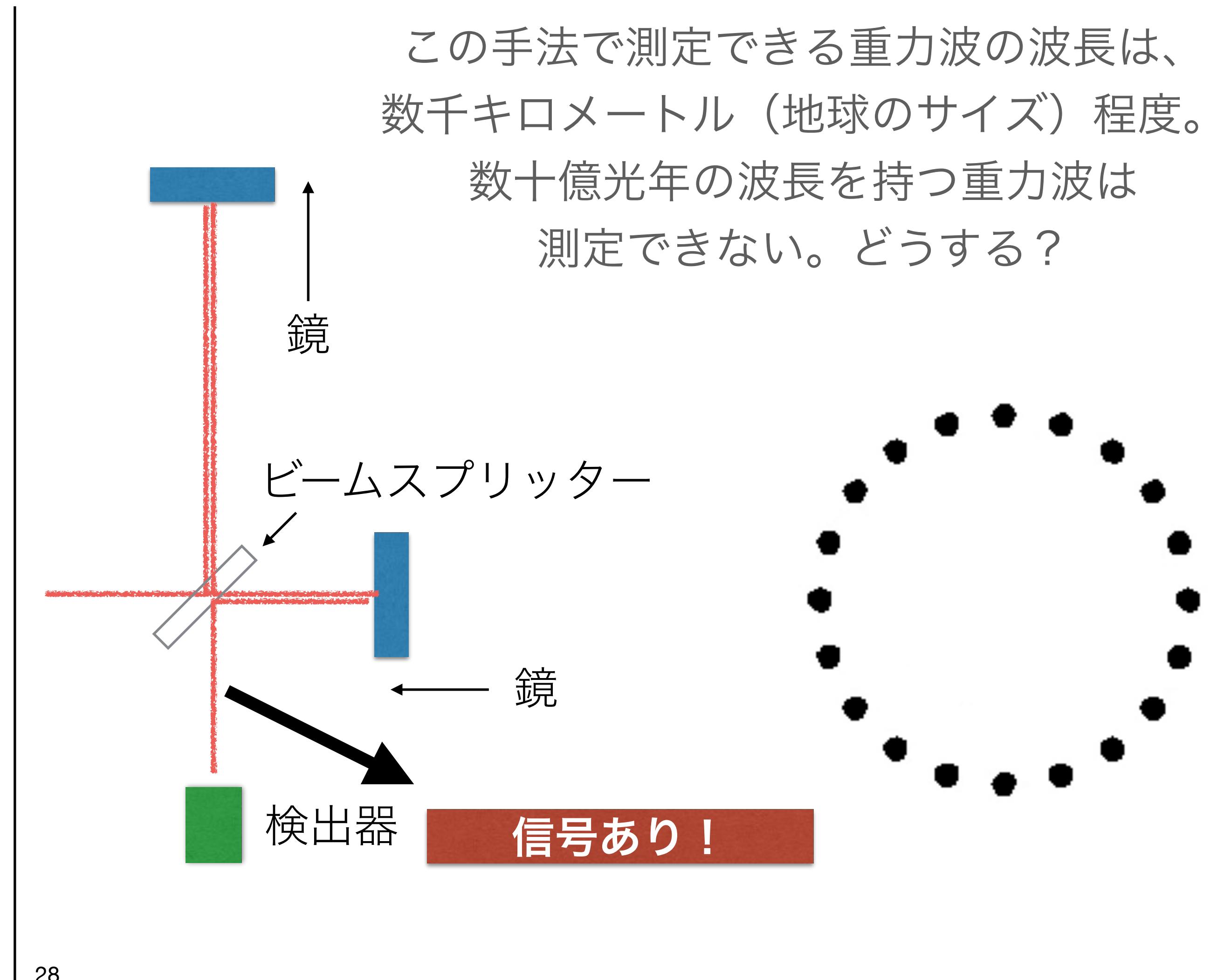
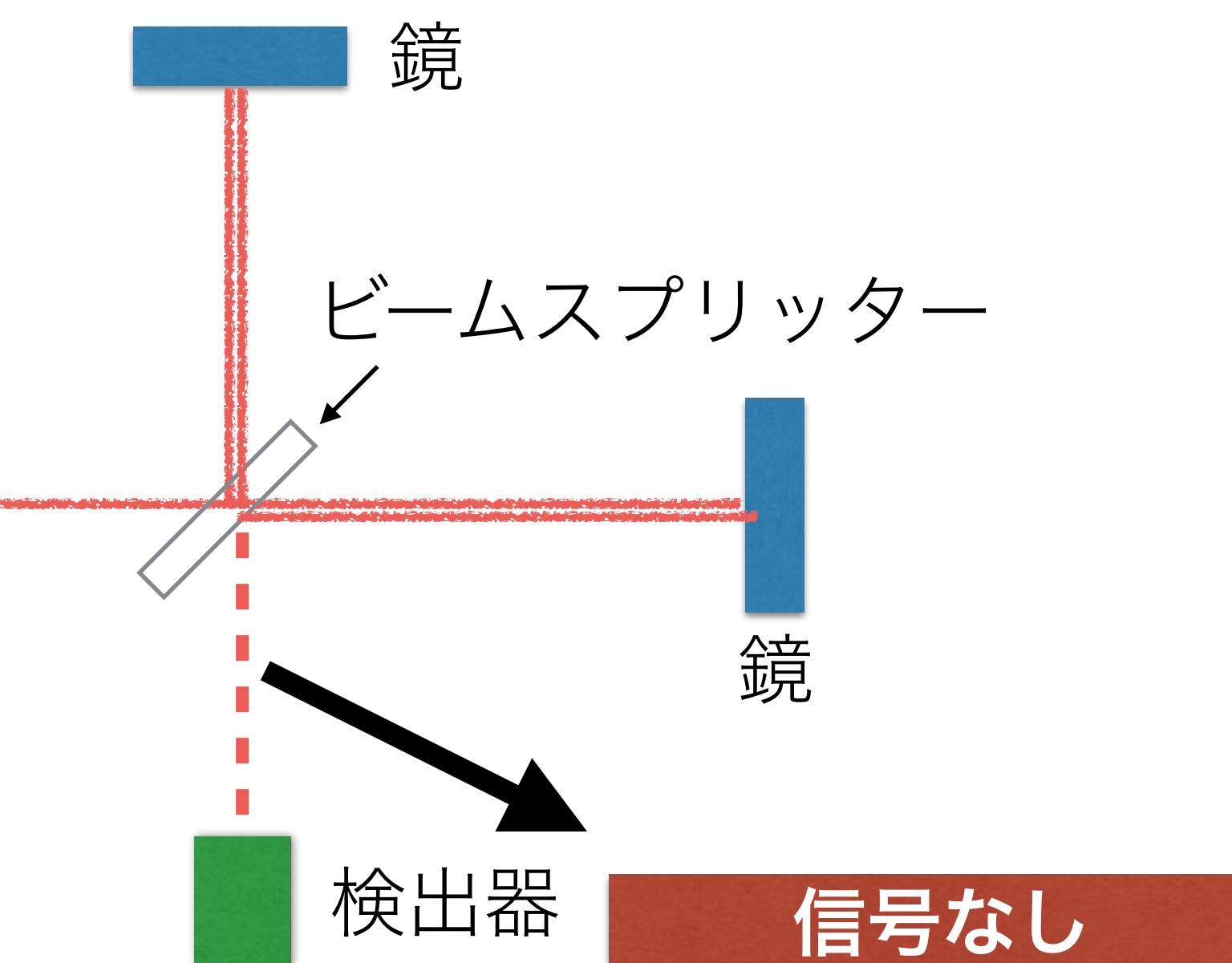
原始重力波は、  
ありとあらゆる  
波長で生成される。  
  
波長に応じて、  
観測手法は異なる。

スペクトルがこのような形になる  
理由は、アムステルダム大学の集中  
講義1日目のスライドを参照

# 重力波と宇宙マイクロ波背景放射

# レーザー干渉計を用いた測定

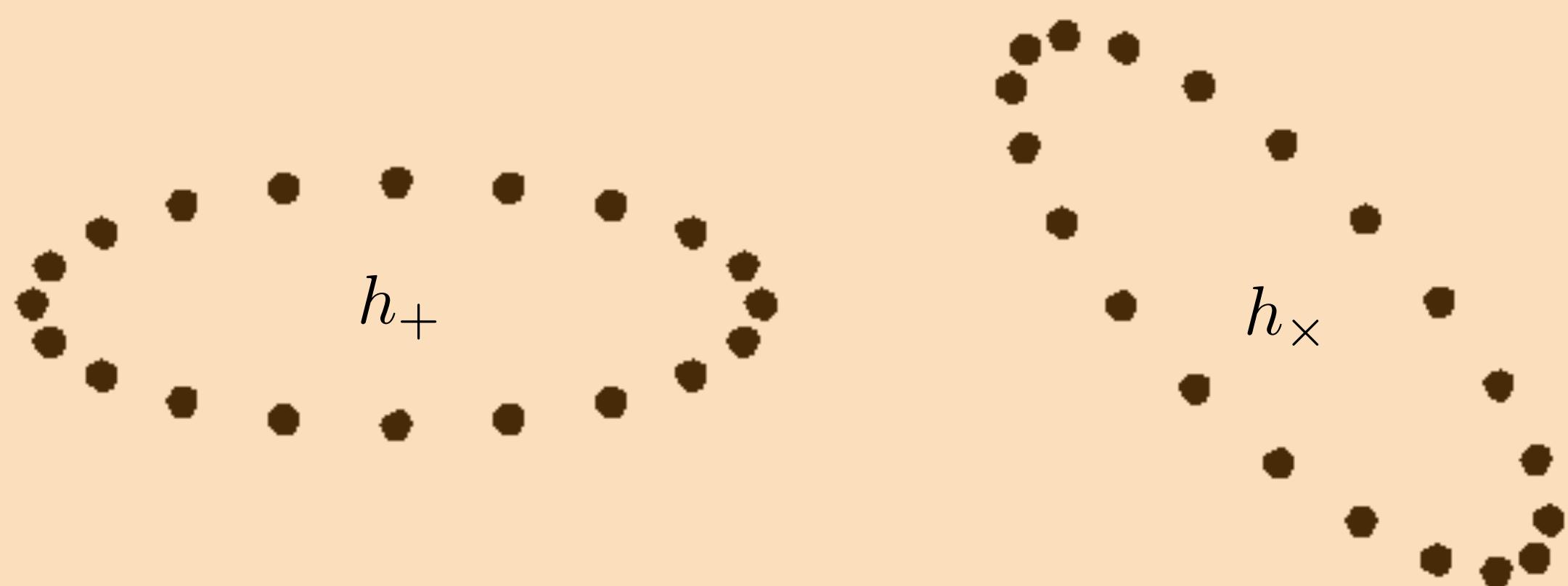
LIGOやVIRGO、そしてKAGRAでも用いられる手法



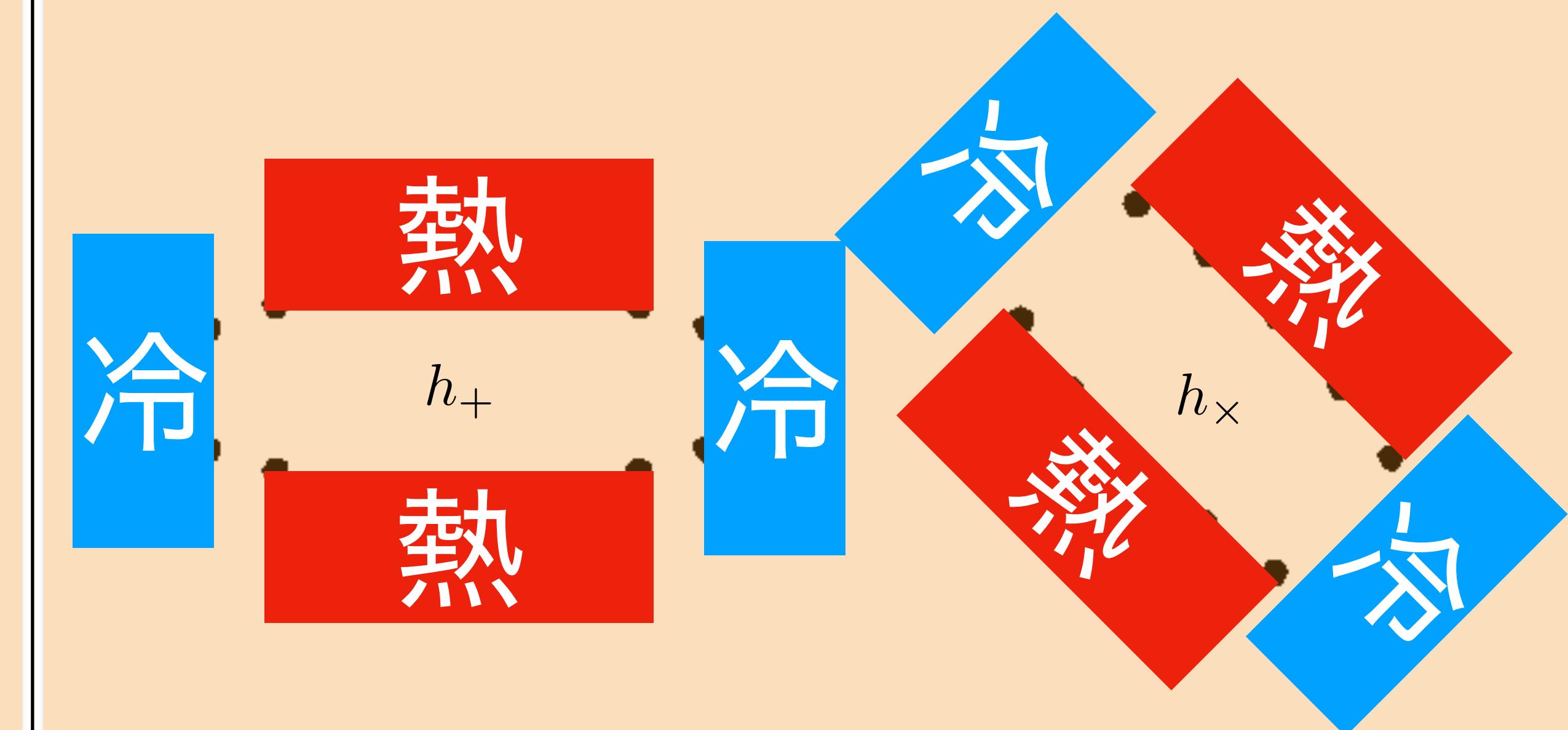
# 宇宙マイクロ波背景放射を用いた測定

## 重力波による赤方・青方偏移によって温度異方性が生じる

一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



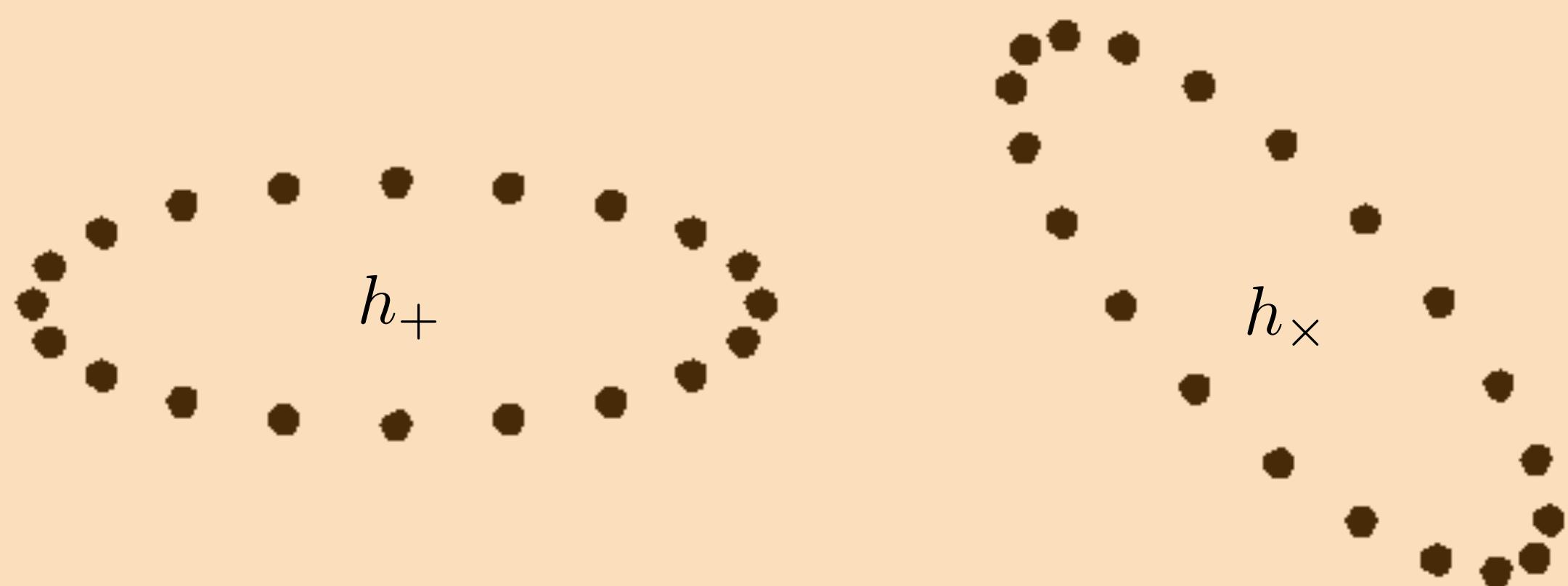
一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



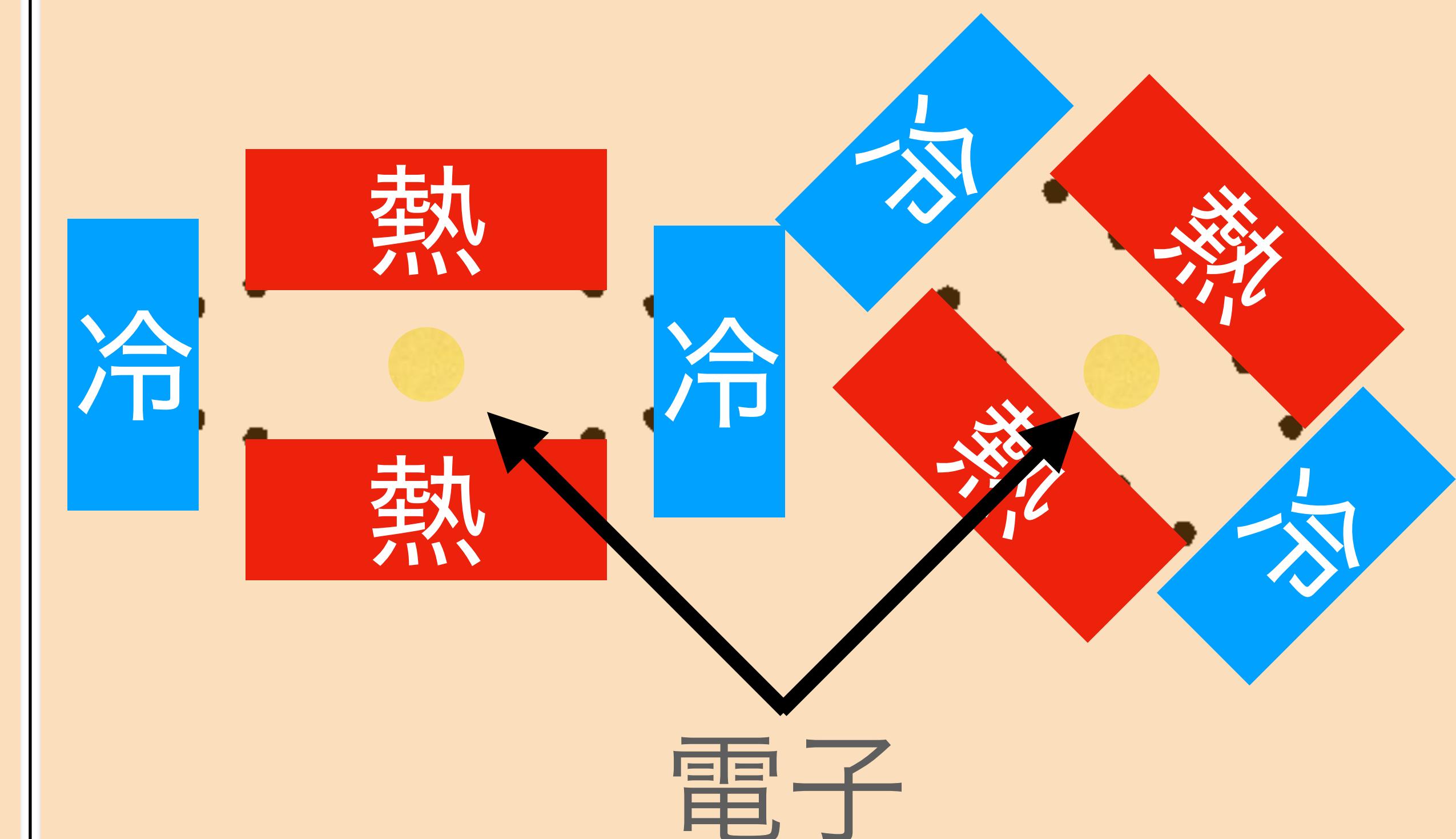
# 宇宙マイクロ波背景放射を用いた測定

## 重力波による赤方・青方偏移によって温度異方性が生じる

一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



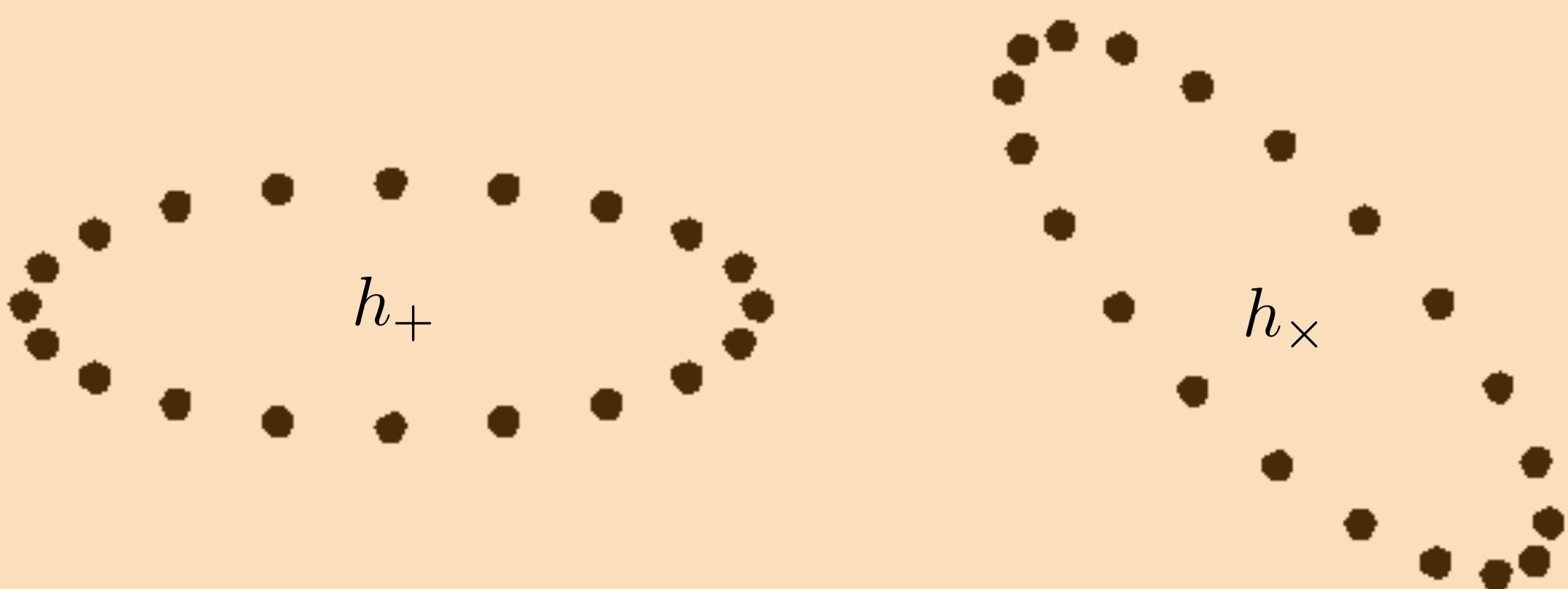
一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



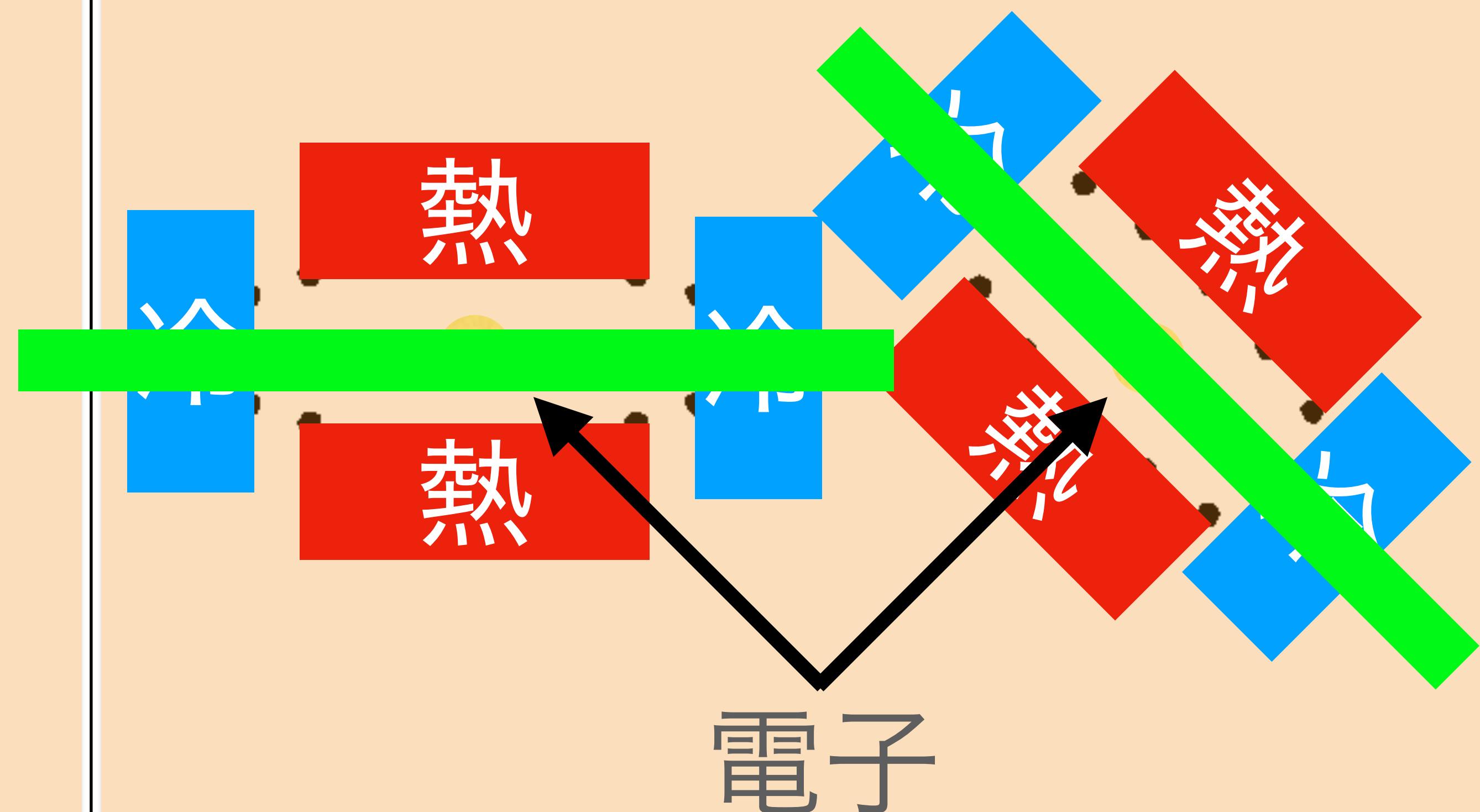
# 宇宙マイクロ波背景放射を用いた測定

電子が温度異方性を持つ入射光を散乱して、偏光が生じる

一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



一様な放射場（宇宙マイクロ波背景放射）



写真提供: TALEX



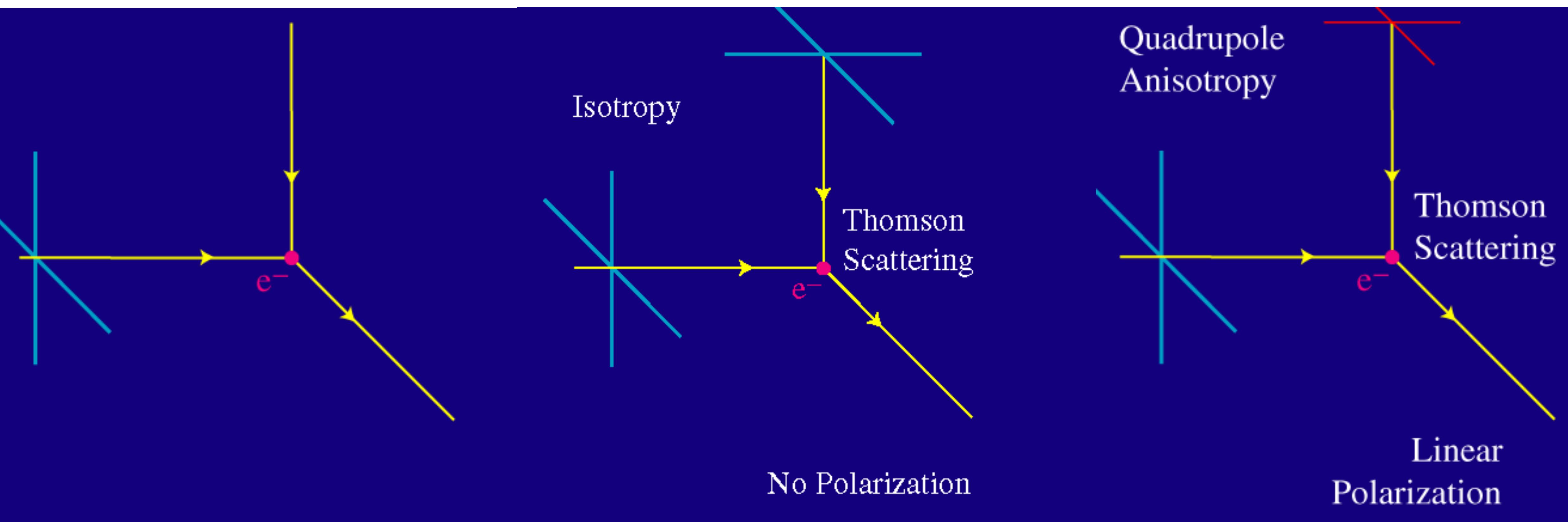
水平方向に偏光

写真提供: TALEX



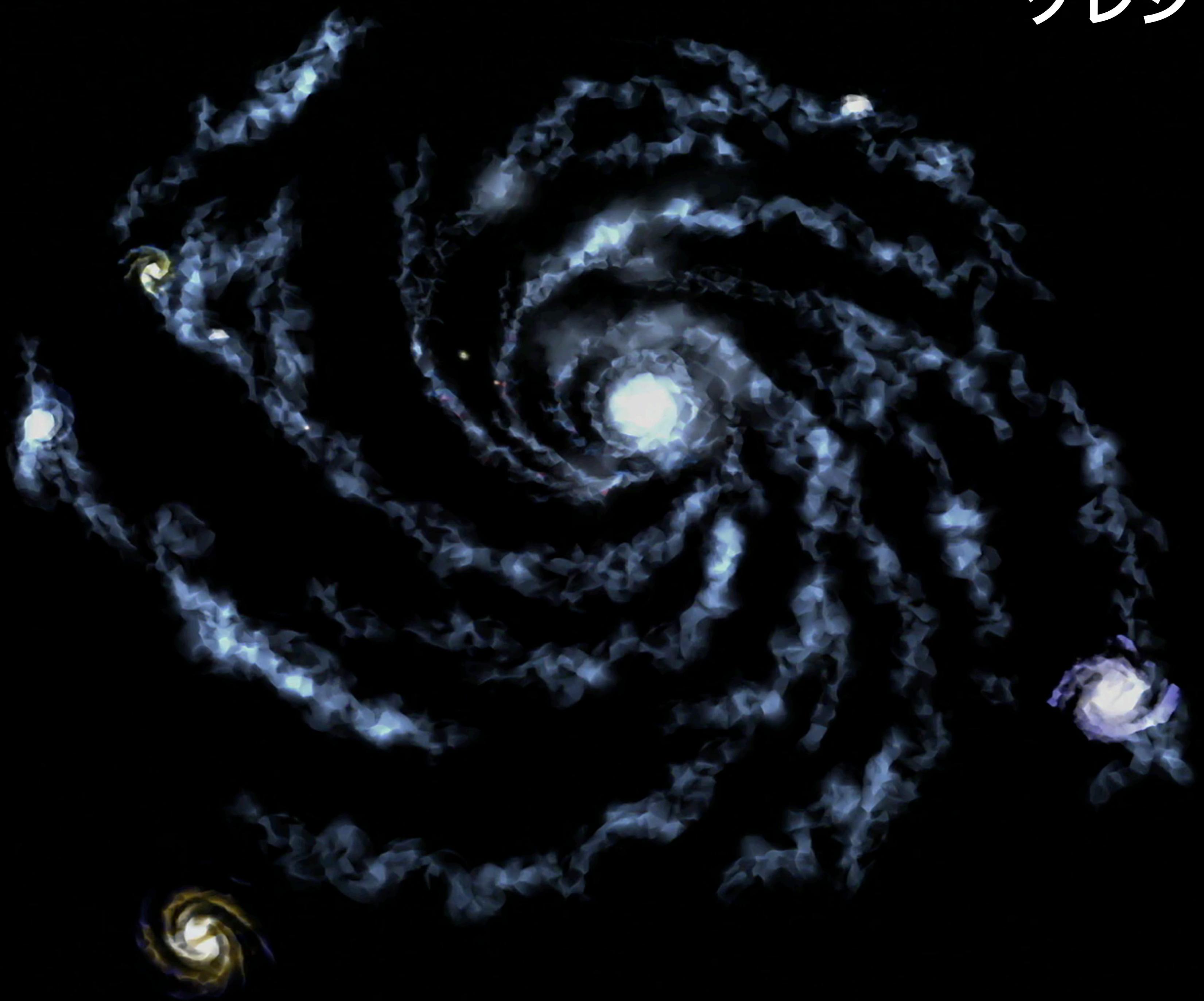
# 偏光生成の物理

必要十分条件：散乱と、四重極を持つ非等方な入射光

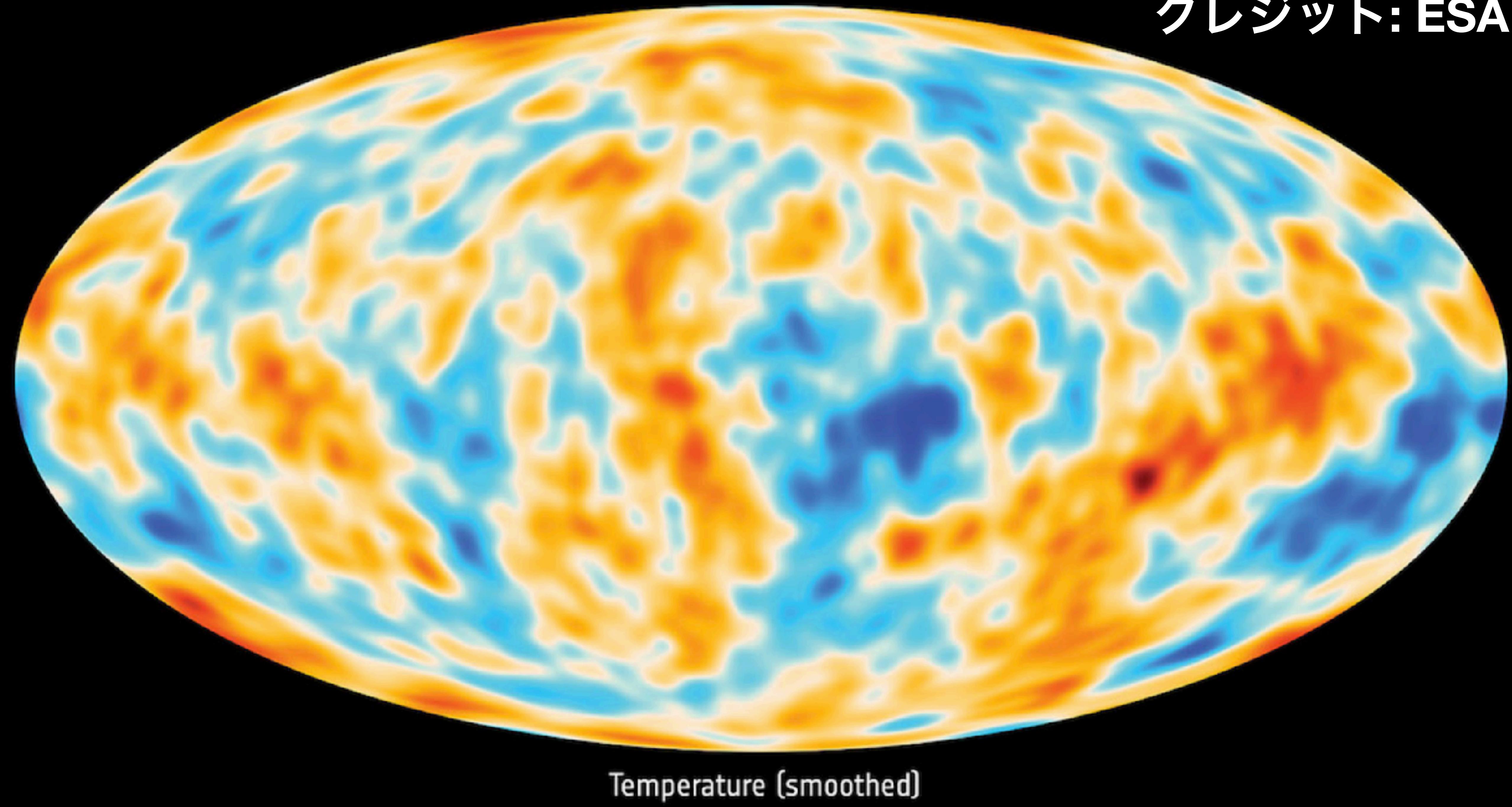


アニメーション：Wayne Hu

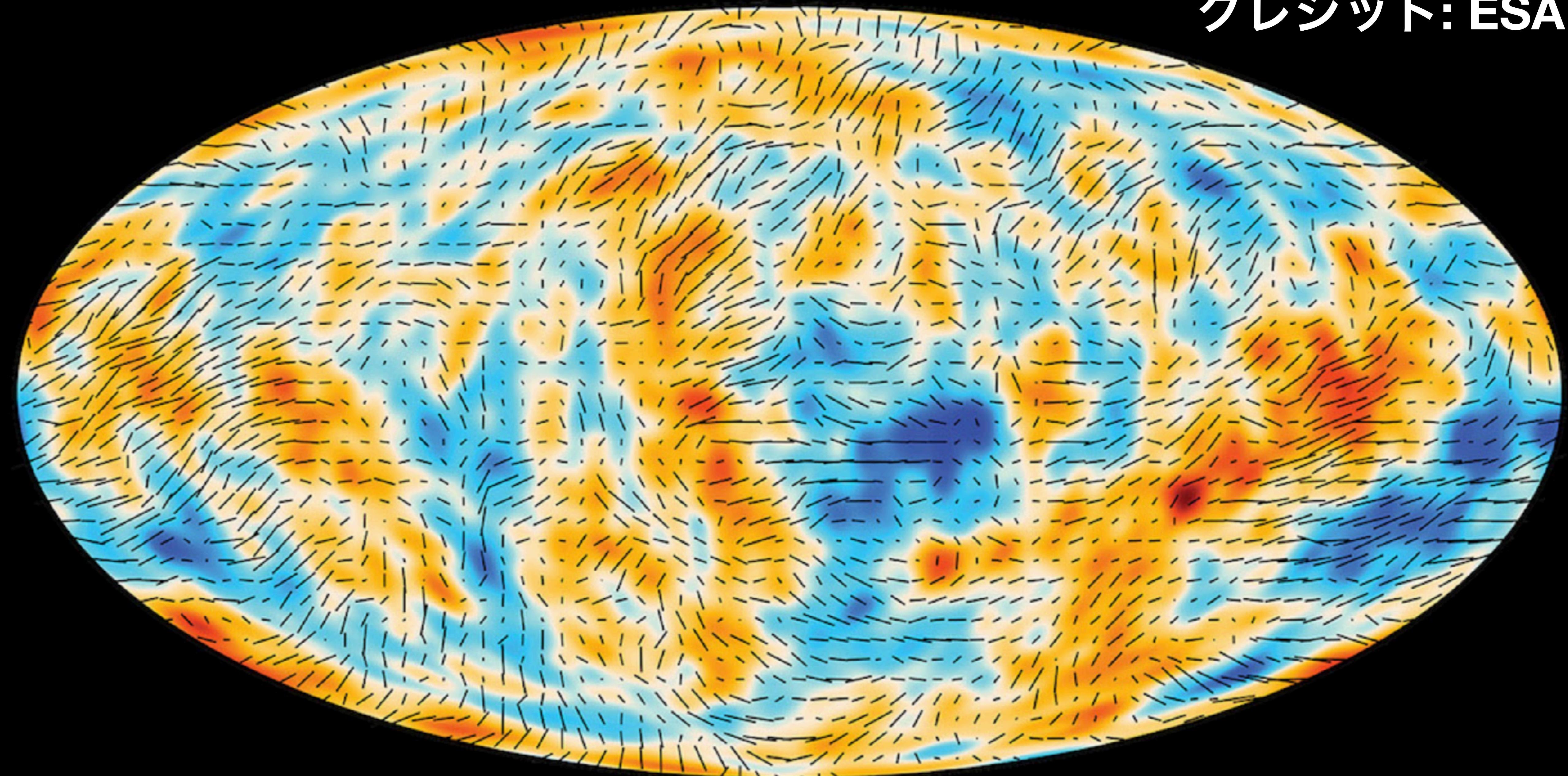
クレジット: WMAP



クレジット: ESA



クレジット: ESA



Temperature (smoothed) + Polarisation

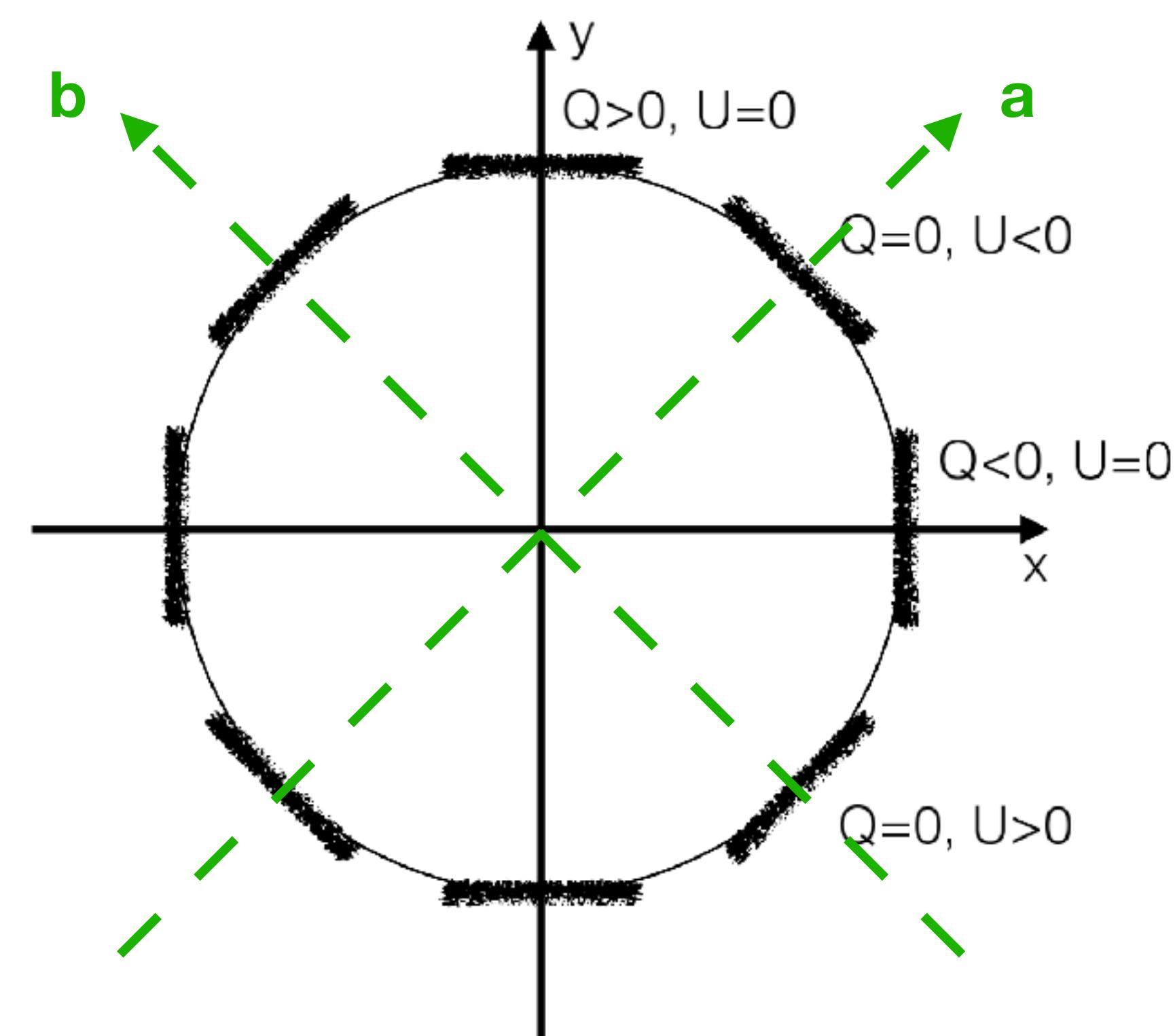
# ストークス・パラメータ

直線偏光を表す量

$$Q \propto E_x^2 - E_y^2$$

$$U \propto E_a^2 - E_b^2$$

( $E_i$ は電場の成分)



- 任意に定めたデカルト座標(x,y)に対する偏光方向に応じて、「ストークス・Q」と「ストークス・U」を定義する。

# ストークス・パラメータ

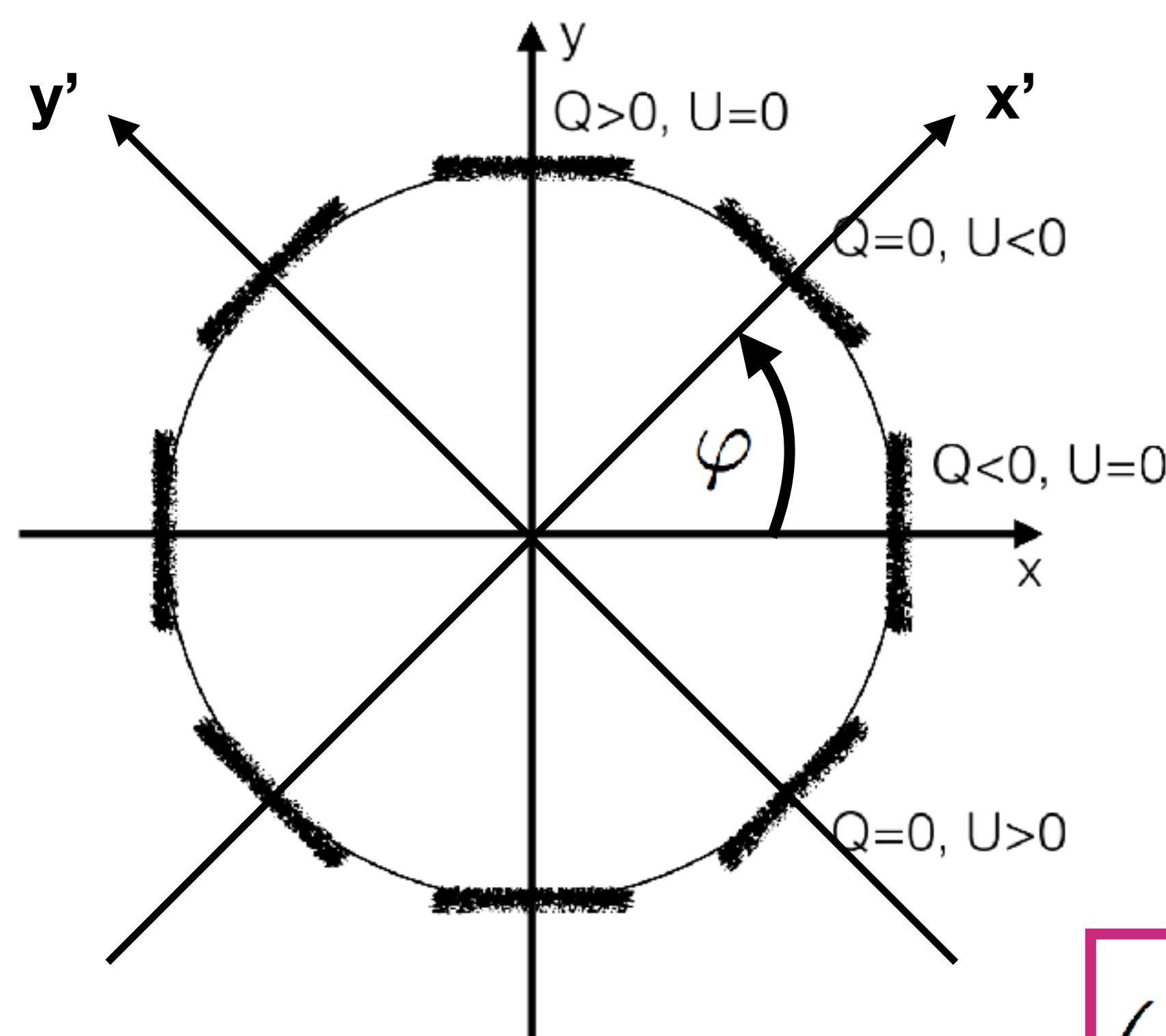
直線偏光を表す量

座標系の回転

$(x, y) \rightarrow (x', y')$ :

$$Q \longrightarrow \tilde{Q}$$

$$U \longrightarrow \tilde{U}$$



- 任意に定めたデカルト座標(x,y)に対する偏光方向に応じて、「ストークス・Q」と「ストークス・U」を定義する。
- QとUは、反時計回りの座標系の回転に対して以下のように変化する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}$$

# ストークス・パラメータの問題点

## ～けんかをやめて～

- ストークス・パラメータ $Q, U$ の値は、座標系の取り方で変わる。
  - 研究者Aは、天球上のある領域の直線偏光の分布を測定して、「この領域はほぼ $Q$ だ」と結論した。
  - しかし研究者Bが同じ天域を観測したところ、「ほぼ $U$ だ」と結論した。
  - どういうこと？
- 研究者AとBが用いた座標系が互いに45度回転していれば、このようなことが起こる。これは不毛だし不幸すぎる。
- 座標系によらない偏光分布の記述方法はないものか？

Eモード・Bモード偏光を定義して、座標系によらずに偏光分布を記述する。

# ストークス・パラメータの複素数表記

- $Q$ と $U$ は観測量なので実数だが、のちの利便性のために複素数の組み合わせ

$$Q \pm iU$$

を考える。これは座標系の反時計回りの回転に対して

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}$$

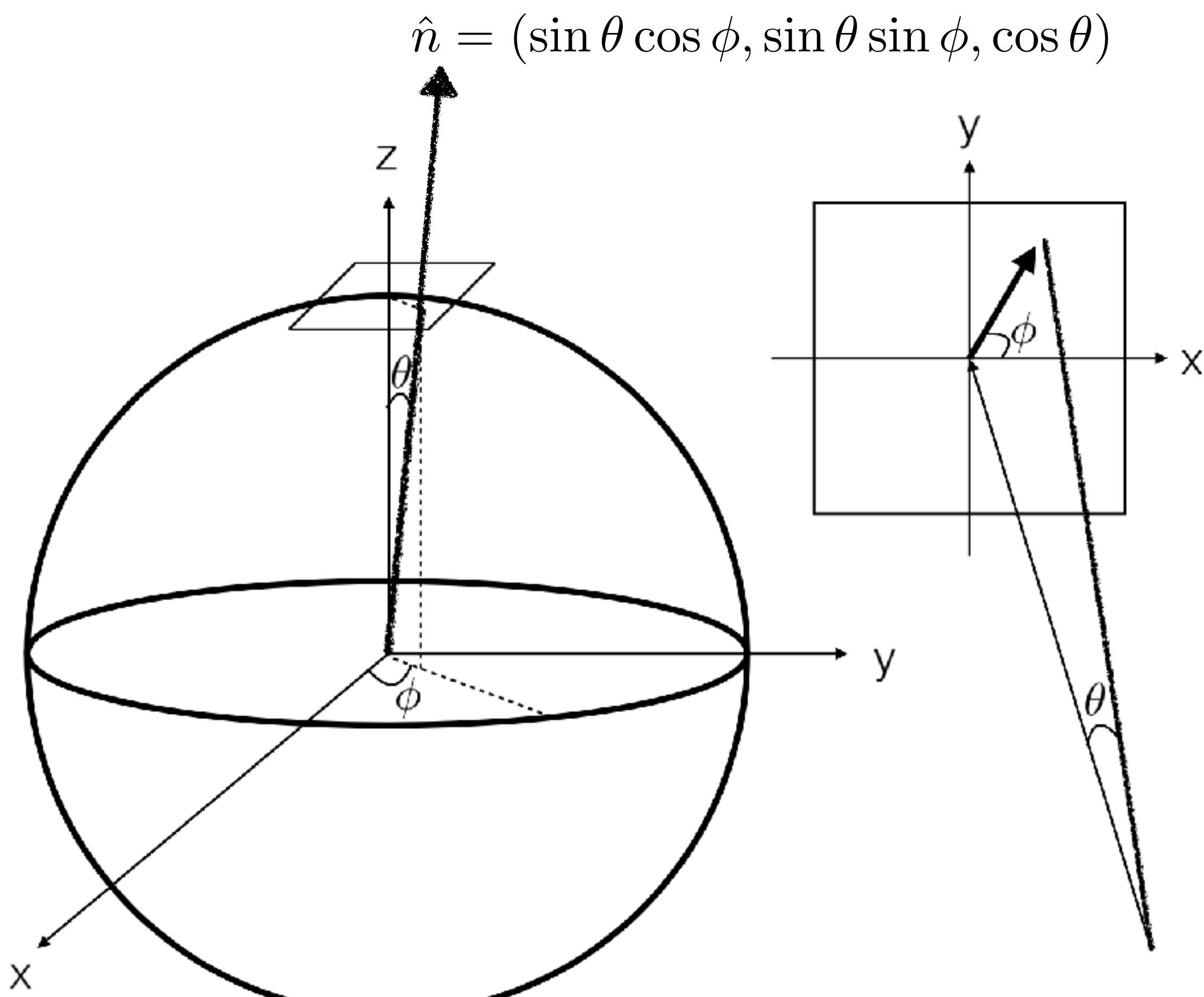
$$\tilde{Q} + i\tilde{U} = \exp(-2i\varphi)(Q + iU)$$

$$\tilde{Q} - i\tilde{U} = \exp(2i\varphi)(Q - iU)$$

と変換する。このように変換する量は「スピント2を持つ」と言われる。

# ストークス・パラメータをフーリエ変換

全天を扱う際は球面調和関数が必要だが、不必要に煩雑なので「フラット・スカイ近似」を使う



- 天頂の限られた天域に、デカルト座標( $x,y$ )を貼り、そこで観測された $Q,U$ を2次元フーリエ変換してみる。

$$Q(\theta) + iU(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} a_\ell \exp(i\ell \cdot \theta)$$

2次元の波数ベクトルは

$$\ell = (\ell \cos \phi_\ell, \ell \sin \phi_\ell)$$

- しかし、天頂を中心とする座標系の回転で左辺は変化するため、フーリエ変換の係数 $a_\ell$ も変化する。

# スピン2のフーリエ変換

- フーリエ変換の係数から方位角を抜き出して、以下のように書いてみる：

$$Q(\theta) + iU(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} a_\ell \exp(i\ell \cdot \theta)$$

$$a_\ell = -_2 a_\ell \exp(2i\phi_\ell)$$

- 座標系を反時計回りに  $\varphi$  だけ回転すれば、フーリエ空間の方位角は

$$\phi_\ell \rightarrow \tilde{\phi}_\ell = \phi_\ell - \varphi$$

と変化し、左辺の変化を打ち消す！

$$\tilde{Q} + i\tilde{U} = \exp(-2i\varphi)(Q + iU)$$

# スピン2のフーリエ変換

## Eモード・Bモード偏光

- フーリエ変換の係数から方位角を抜き出して、以下のように書いてみる：

$$Q(\theta) + iU(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} a_\ell \exp(i\ell \cdot \theta)$$

$$a_\ell = -_2a_\ell \exp(2i\phi_\ell)$$

- 座標系を反時計回りに  $\varphi$  だけ回転すれば、フーリエ空間の方位角は

$$\phi_\ell \rightarrow \tilde{\phi}_\ell = \phi_\ell - \varphi$$

と変化し、左辺の変化を打ち消す！

$$\tilde{Q} + i\tilde{U} = \exp(-2i\varphi)(Q + iU)$$

- よって、スピン $\pm 2$ を持つ量のフーリエ変換は

$$Q(\theta) \pm iU(\theta) = - \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} \pm_2 a_\ell \exp(\pm 2i\phi_\ell + i\ell \cdot \theta)$$

スピン $\pm 2$ の調和関数

と書くのが都合が良い。 $\pm_2 a_\ell$  は  $\varphi$  の変化を受けない

- ここで終わっても良いが、さらに

$$\pm_2 a_\ell \equiv -(E_\ell \pm iB_\ell)$$

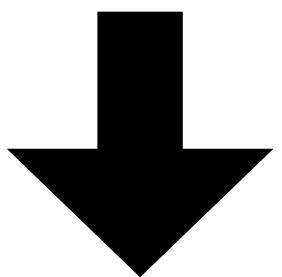
と書いて、最終的に

$$Q(\theta) \pm iU(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (E_\ell \pm iB_\ell) \exp(\pm 2i\phi_\ell + i\ell \cdot \theta)$$

を得る。EとBは何を意味するもの？

# Eモード・Bモード偏光の可視化

$$Q(\theta) \pm iU(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (E_\ell \pm iB_\ell) \exp(\pm 2i\phi_\ell + i\ell \cdot \theta)$$



$$Q(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (E_\ell \cos 2\phi_\ell - B_\ell \sin 2\phi_\ell) \exp(i\ell \cdot \theta)$$

$$U(\theta) = \int \frac{d^2\ell}{(2\pi)^2} (E_\ell \sin 2\phi_\ell + B_\ell \cos 2\phi_\ell) \exp(i\ell \cdot \theta)$$

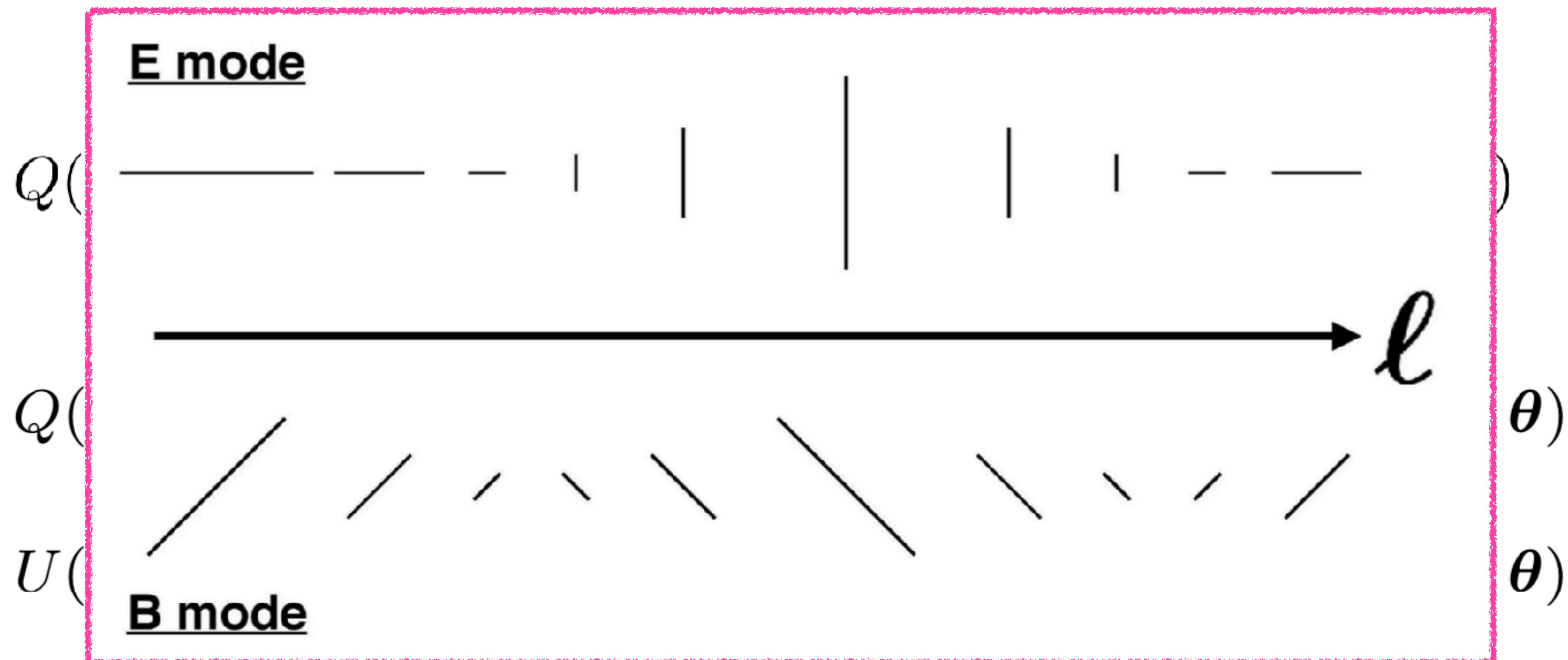
- 单一の波数 $\ell$ を持つ2次元の平面波を考え、**波数ベクトルの方向をx軸( $\Phi=0$ )にとれば**

$$Q(\theta) = E_\ell \exp(i\ell\theta)$$

$$U(\theta) = B_\ell \exp(i\ell\theta)$$

これらの変更パターンはどのように見える？

# Eモード・Bモード偏光の可視化



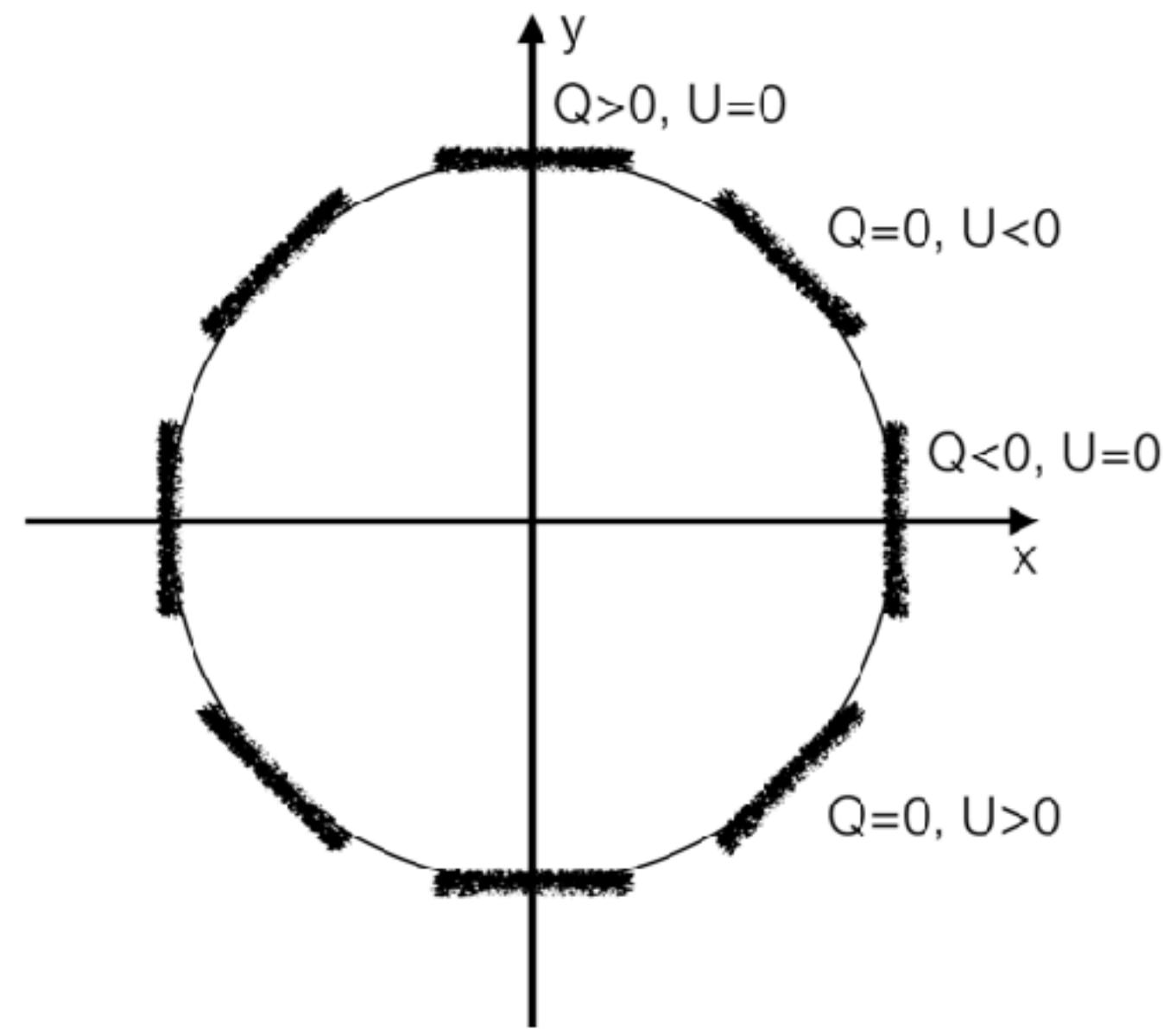
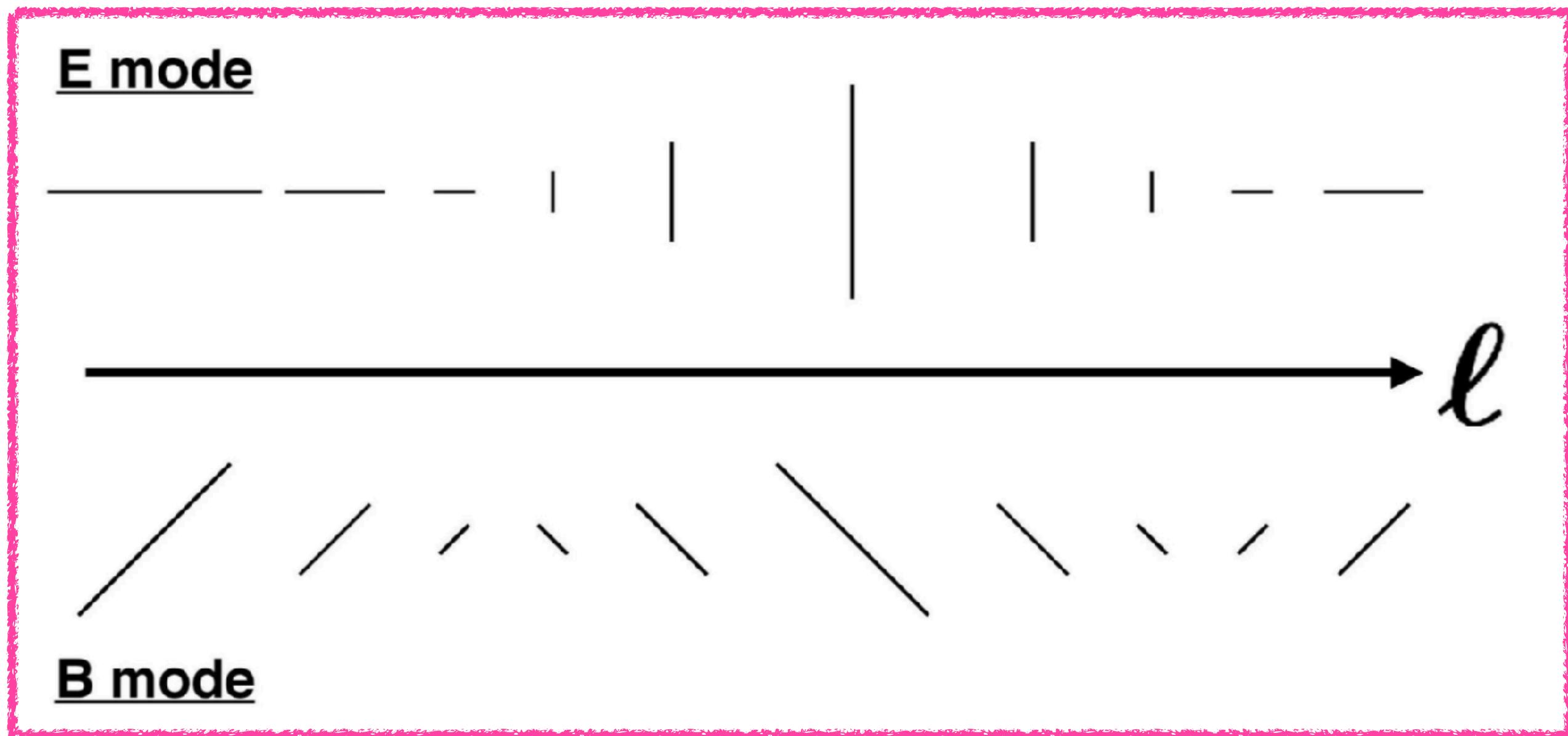
- 単一の波数 $\ell$ を持つ2次元の平面波を考え、波数ベクトルの方向をx軸にとれば

$$Q(\theta) = E_\ell \exp(i\ell\theta)$$

$$U(\theta) = B_\ell \exp(i\ell\theta)$$

これらの変更パターンはどのように見える？

# Eモード・Bモード偏光の幾何学的な意味



- **Eモード**：波数ベクトルの方向をx軸として定義したストークスQ
- **Bモード**：波数ベクトルの方向をx軸として定義したストークスU

これらは、座標系の回転に依存せず  
に成り立つ！

# 座標系の反転（パリティ変換）

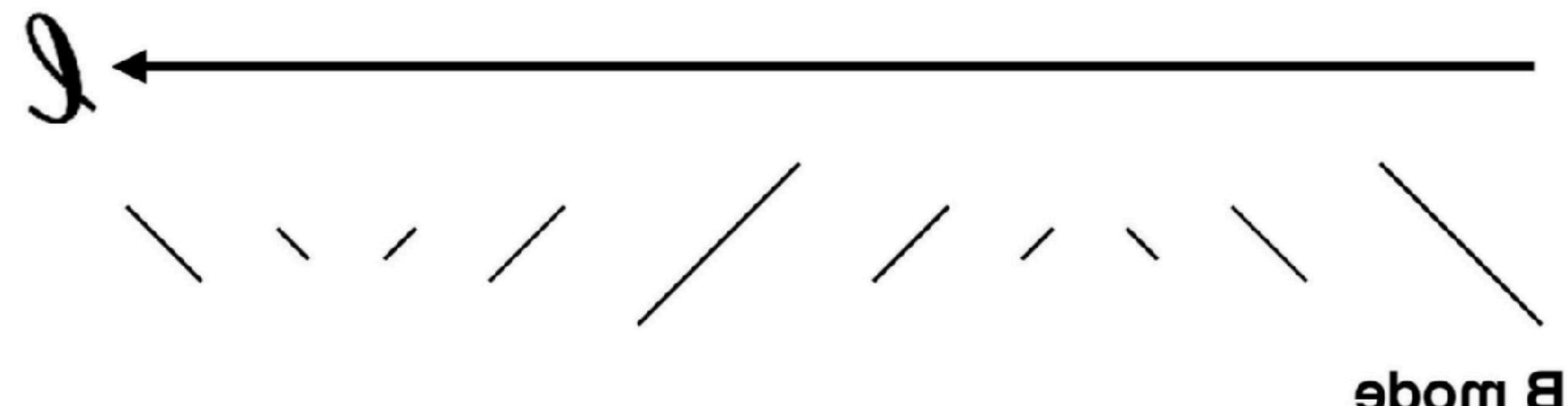
Eモードはそのままだが、Bモードは符号を変える

E mode



B mode

ebom E



- よって、パリティ変換で符号を変えない二点相関関数の組み合わせは

$$\langle E_\ell E_{\ell'}^* \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^{(2)}(\ell - \ell') C_\ell^{EE}$$

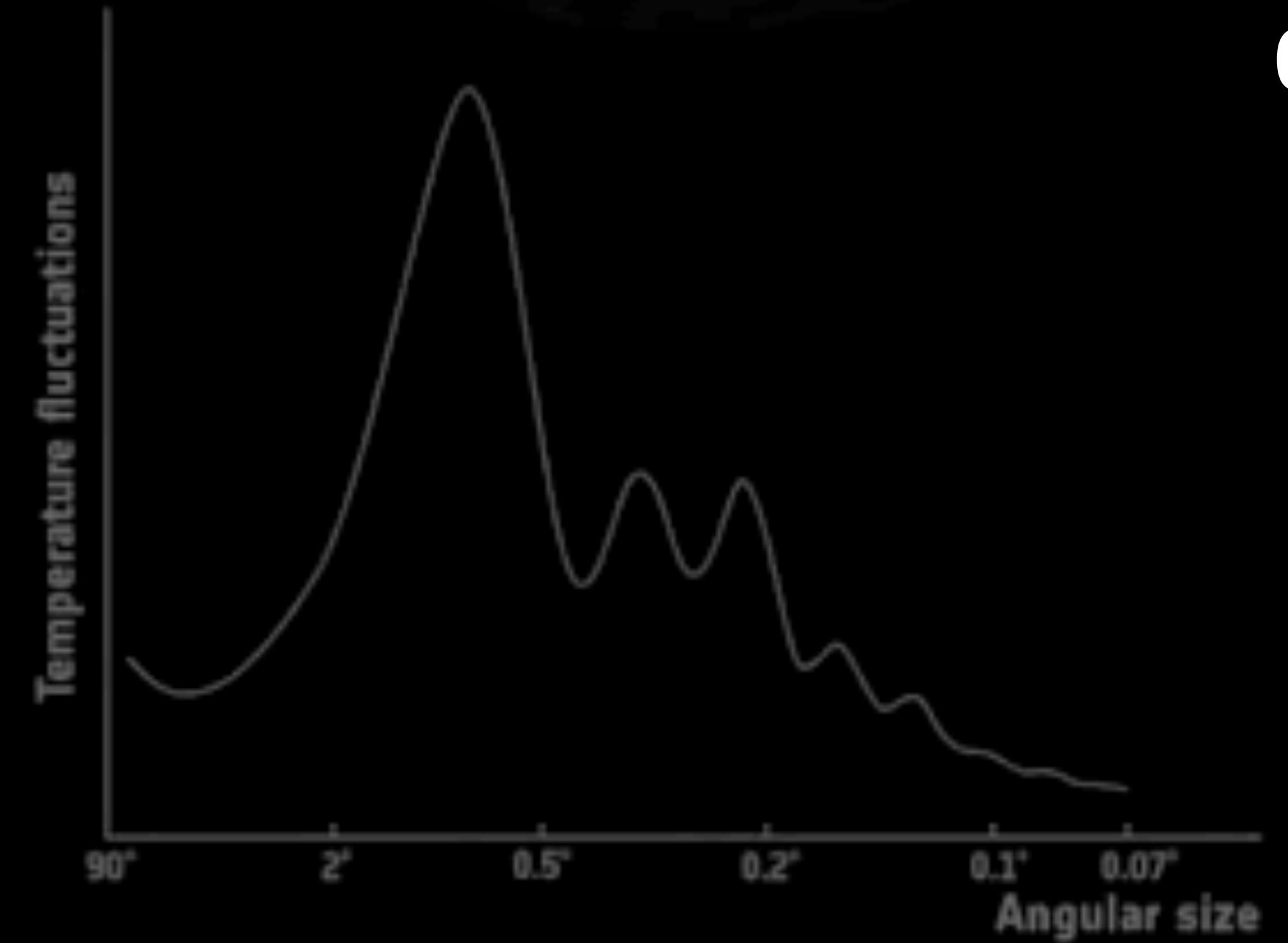
$$\langle B_\ell B_{\ell'}^* \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^{(2)}(\ell - \ell') C_\ell^{BB}$$

$$\langle T_\ell E_{\ell'}^* \rangle = \langle T_\ell^* E_{\ell'} \rangle = (2\pi)^2 \delta_D^{(2)}(\ell - \ell') C_\ell^{TE}$$

- 温度異方性とBモード偏光の相関関数 $\langle TB \rangle$ や、E・Bモード偏光の相互相関関数 $\langle EB \rangle$ は、パリティを破る物理現象がなければゼロ。

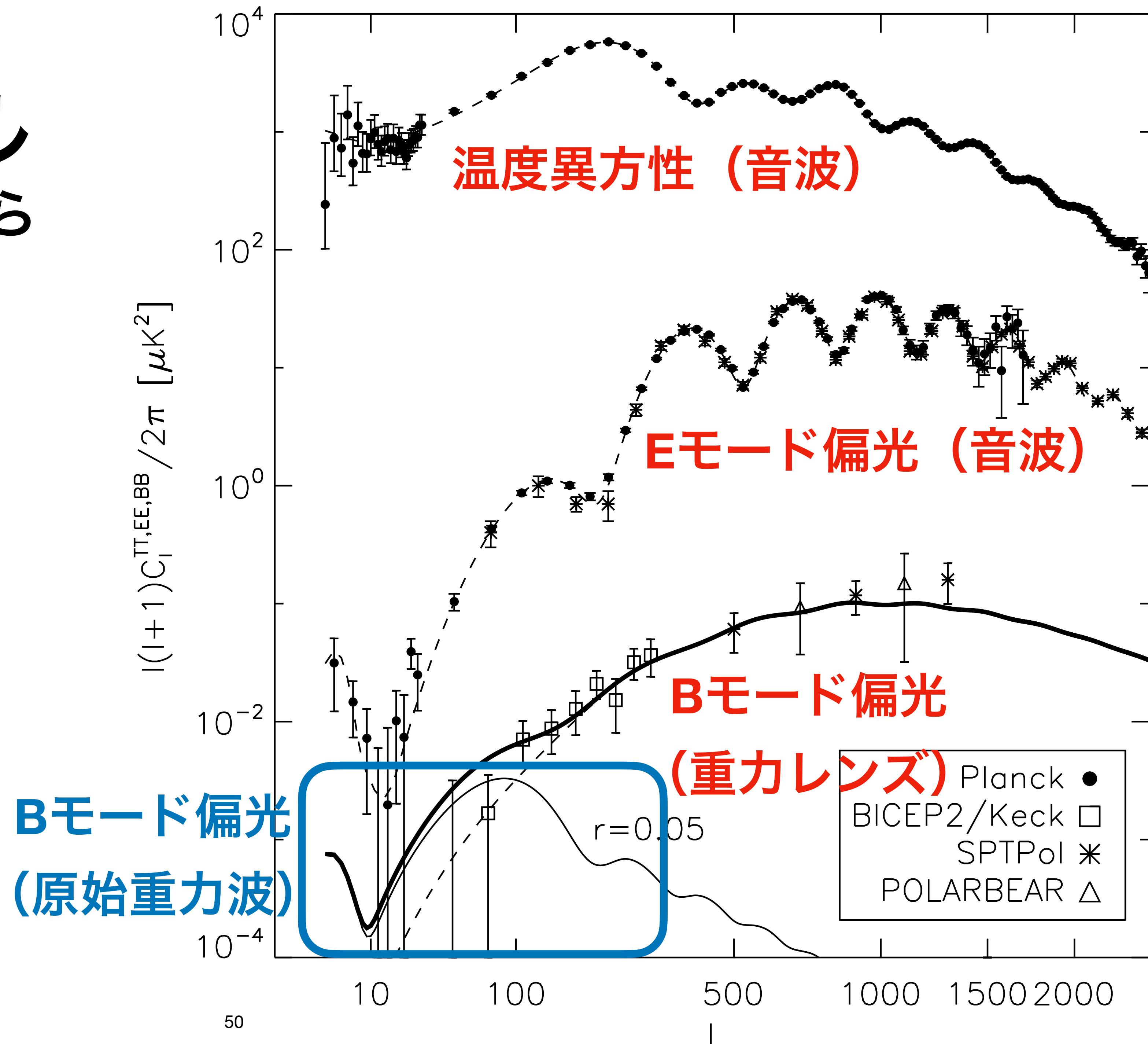
- 逆に言えば、TB, EB相関を使えばパリティを破る物理を探せる！

パワースペクトル ( $C_l$ ) の説明。  
横軸は 2 次元フーリエ波数で、  
半波長に対応する見込み角度とは  
 $\theta = \pi/l$  と関係する。



# パワースペクトル 現在の到達点と、これから

- これまでの測定により、**スカラー型揺らぎ（密度揺らぎ）起源**の温度異方性とEモード偏光（および、重力レンズ効果でEモードがBモードに転化したもの）は高精度で測定された。
- 次は前人未到の、**原始重力波起源のBモード偏光**を測定したい！
  - Bモードパワースペクトルがこのような形となる理由は、アムステルダム大学の集中講義2日目のスライドか、参考書の12章を参照

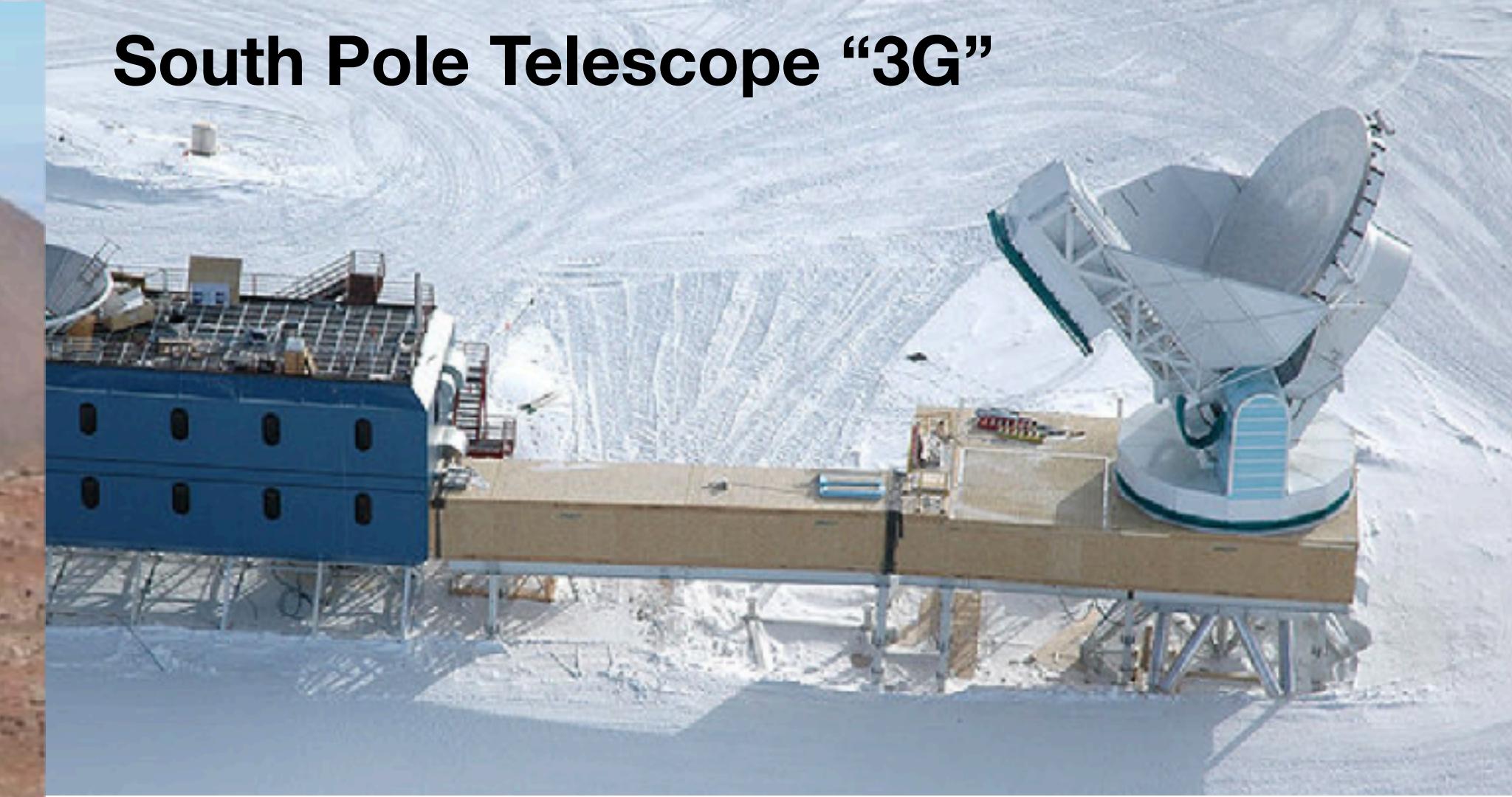


# 観測プロジェクト

**Advanced Atacama  
Cosmology Telescope**

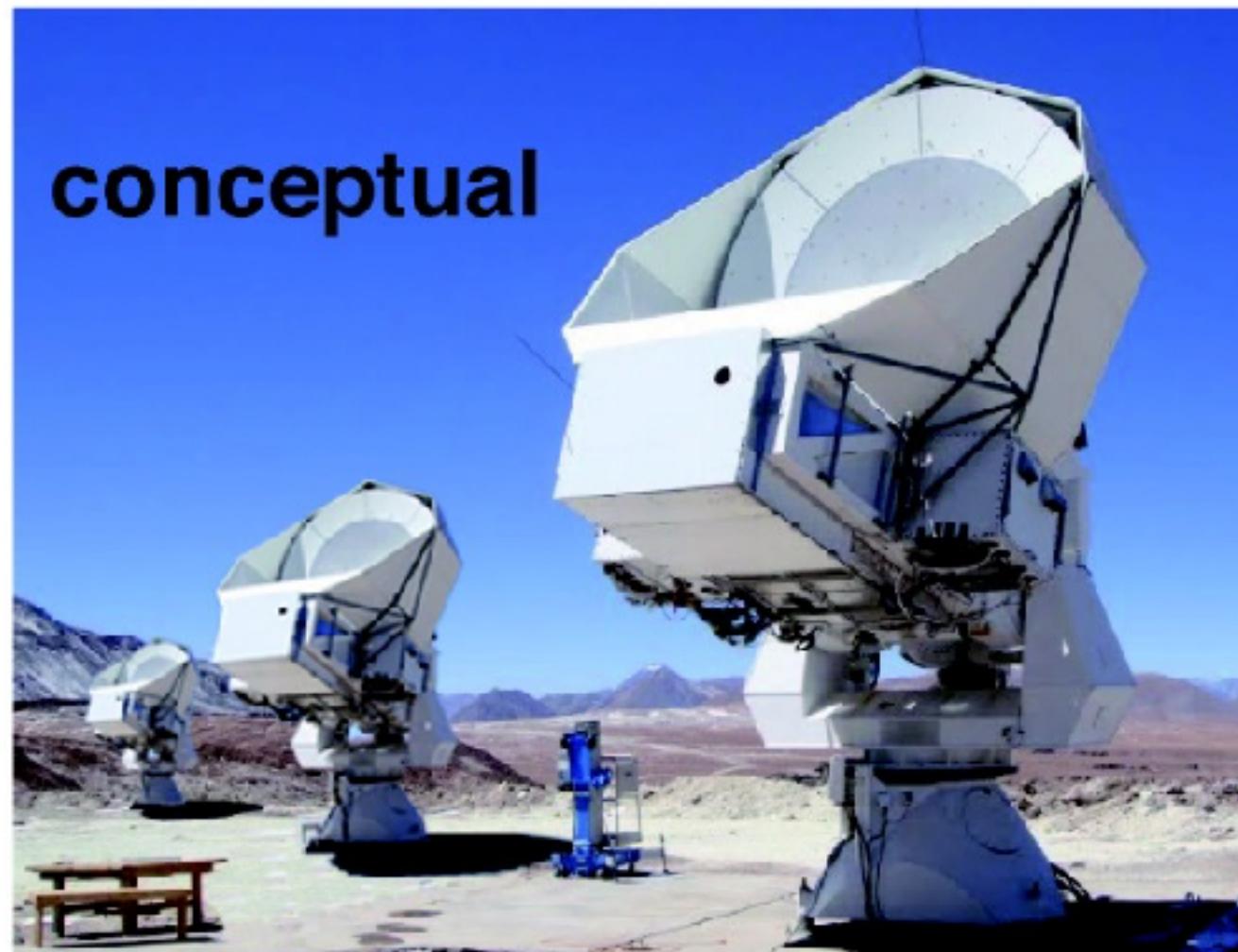


**South Pole Telescope “3G”**



**現在進行中** (一つ10億円くらい)

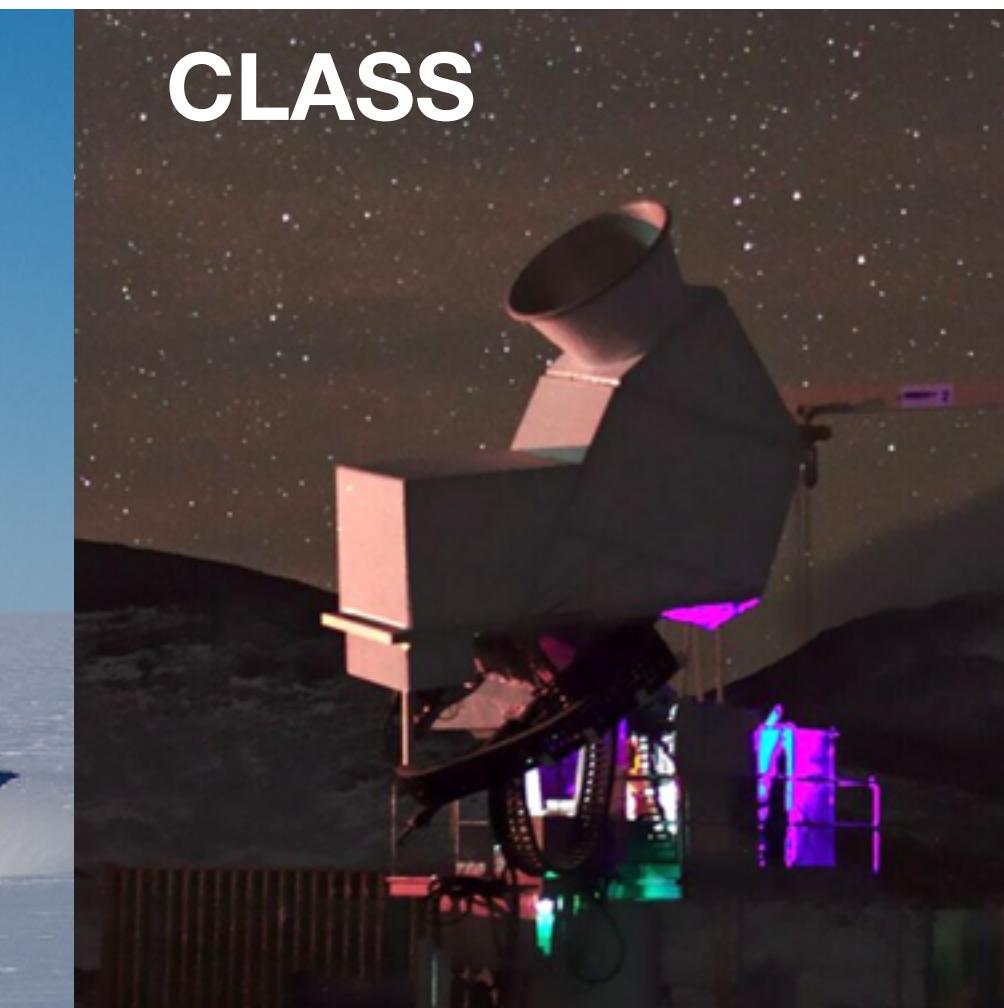
**The Simons Array**

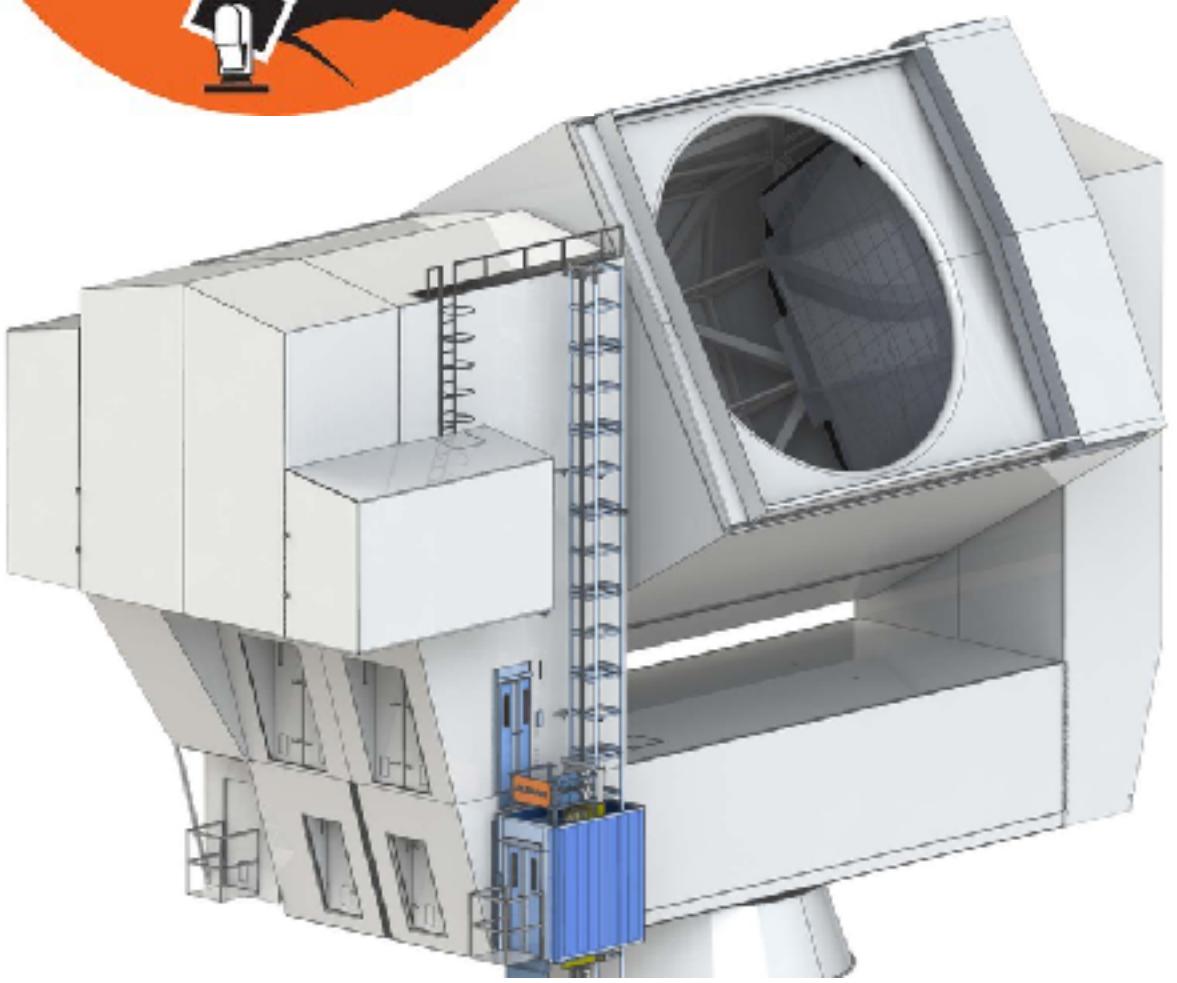


**BICEP/Keck Array**



**CLASS**



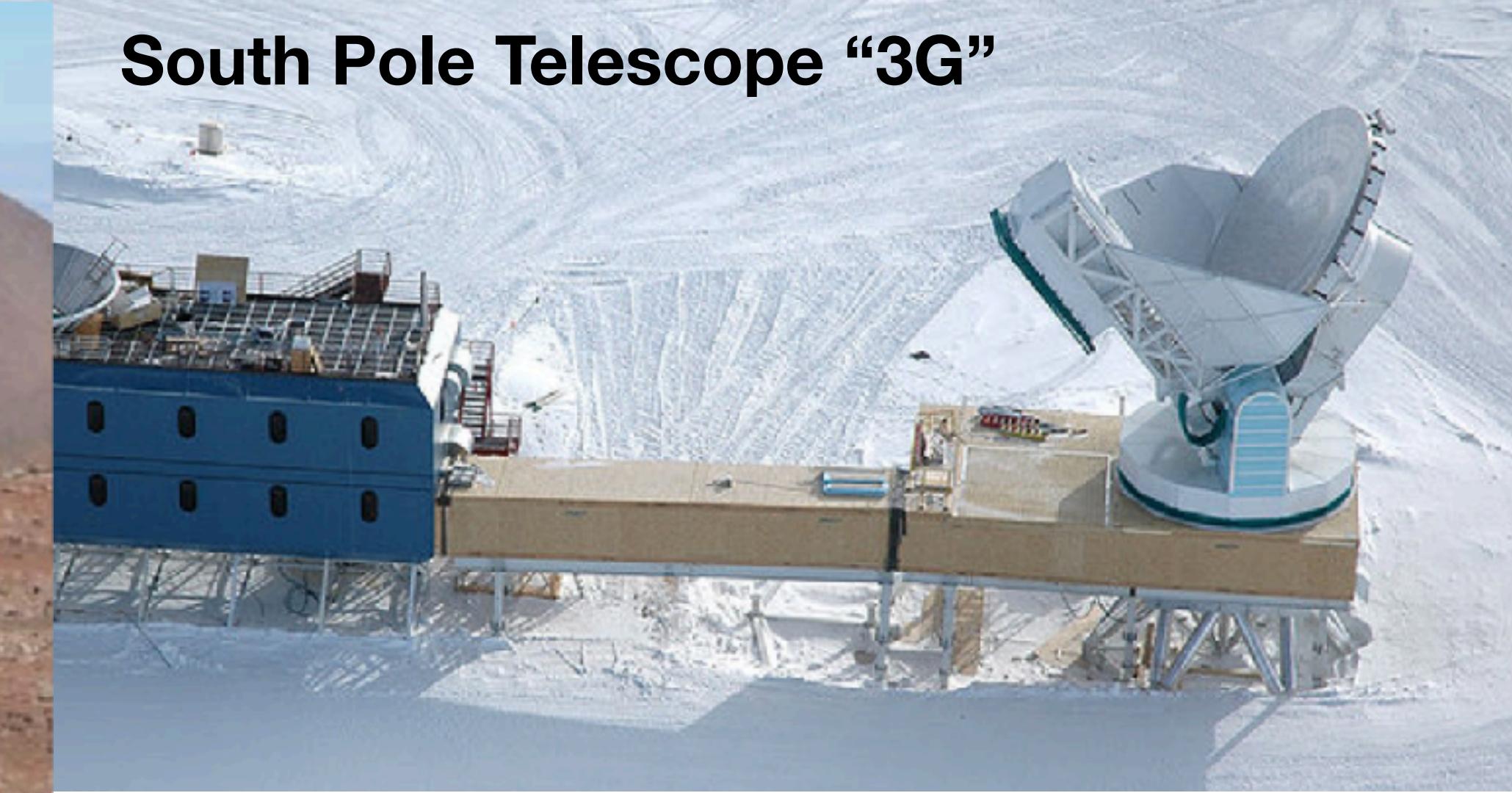


(100億円くらい)

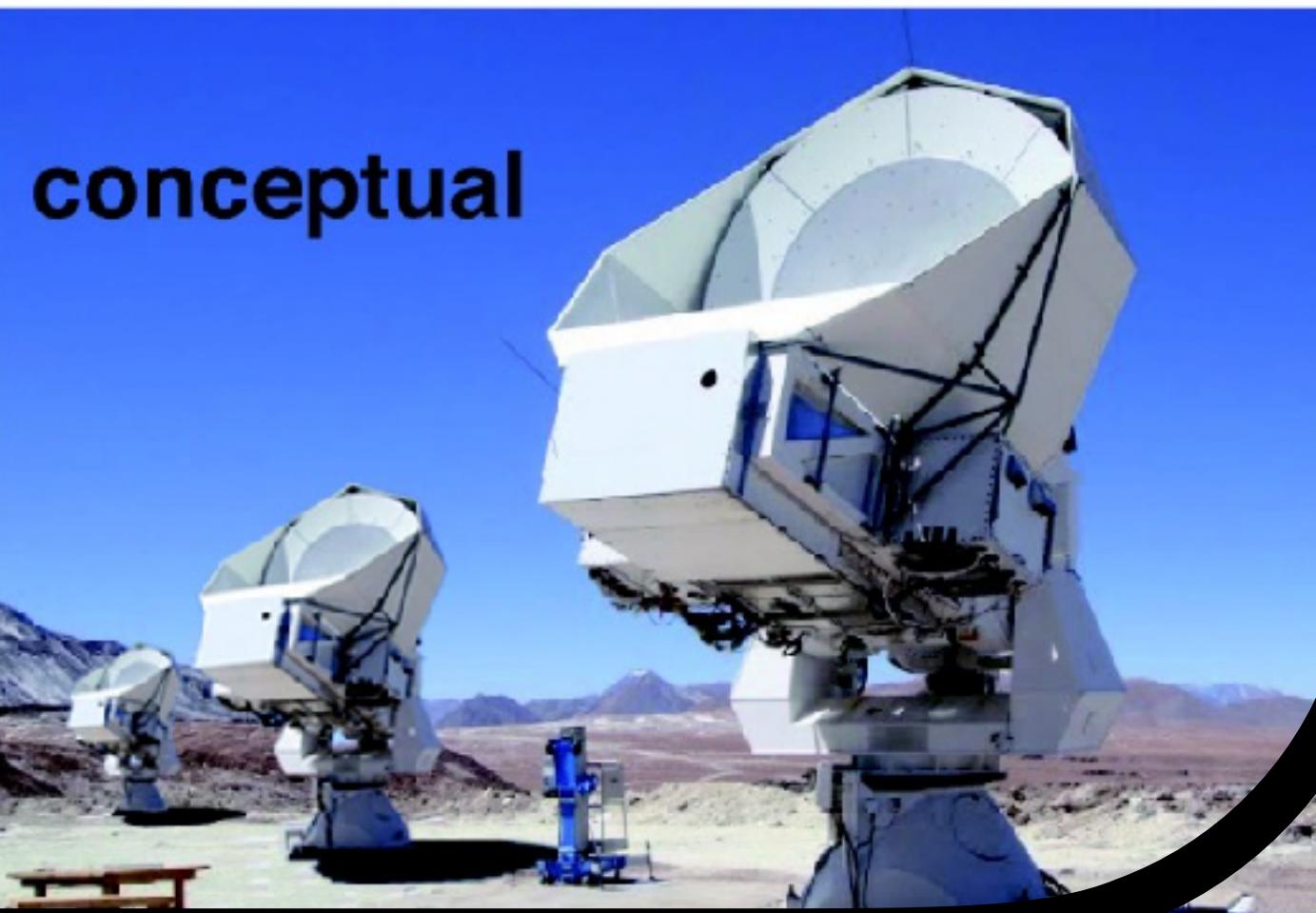
Advanced Atacama  
Cosmology Telescope



South Pole Telescope “3G”



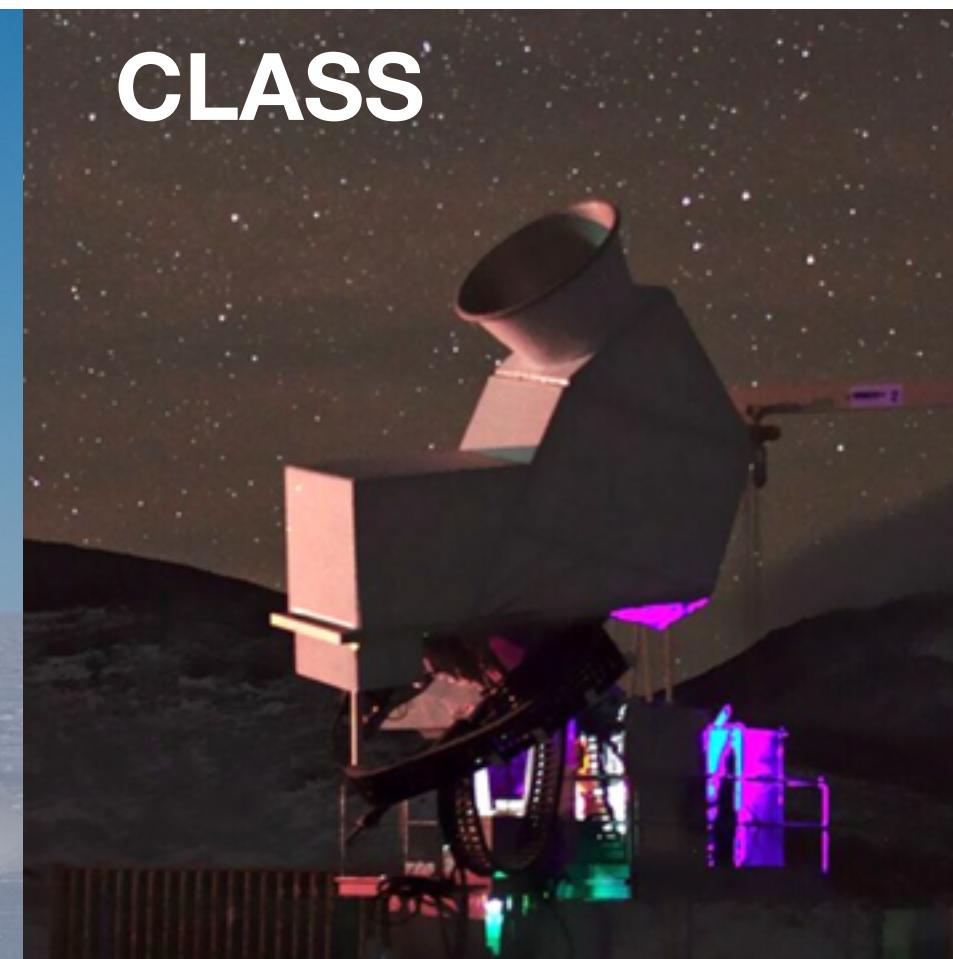
The Simons Array

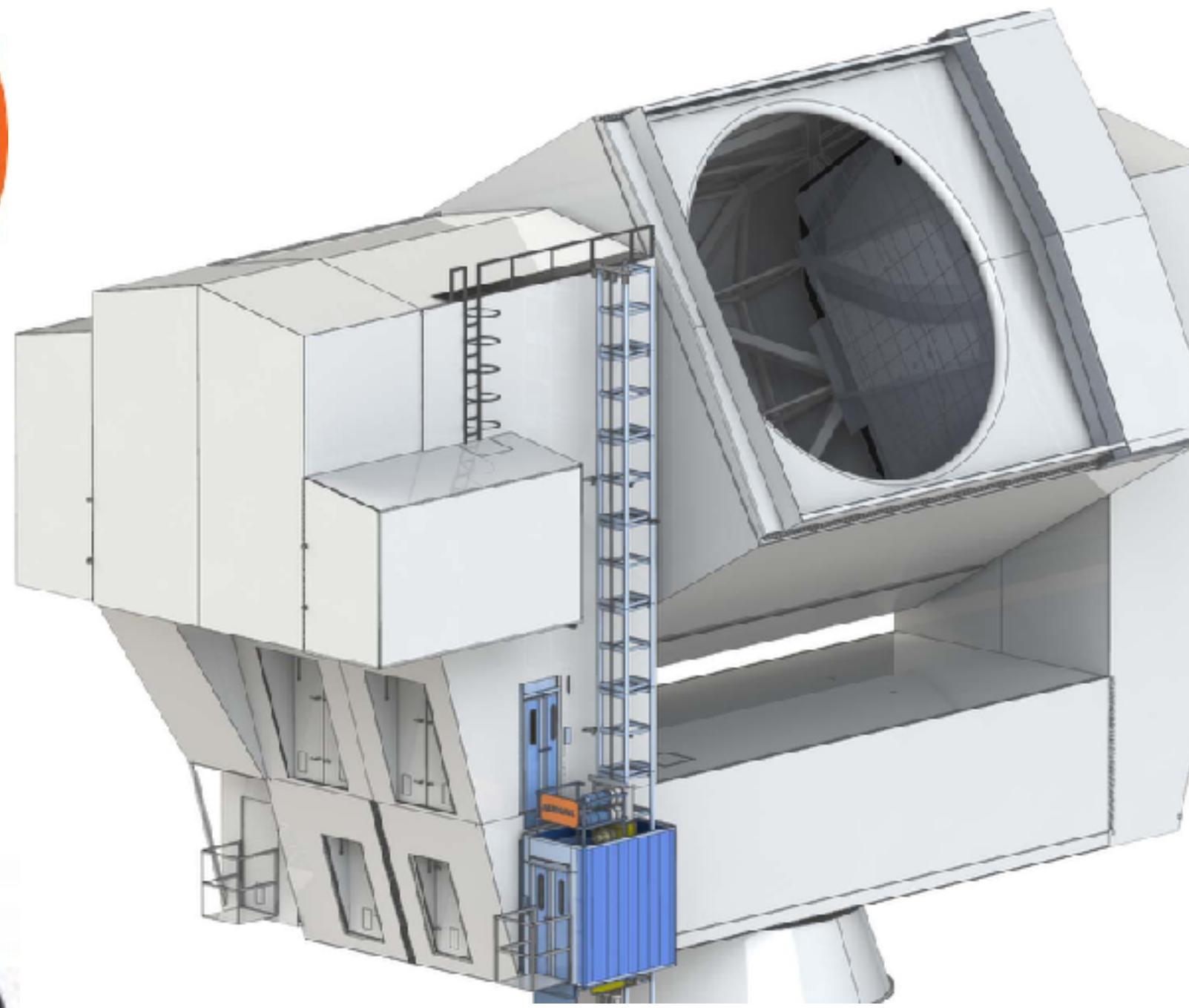


BICEP/Keck Array

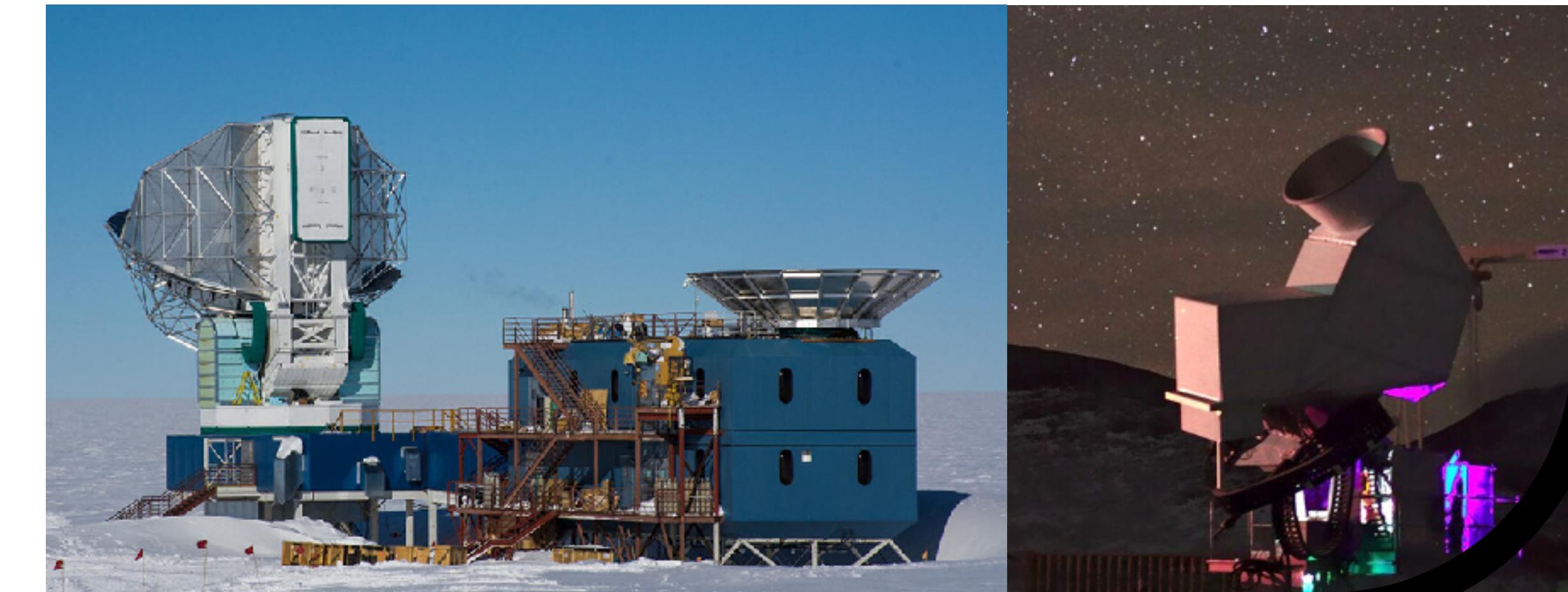


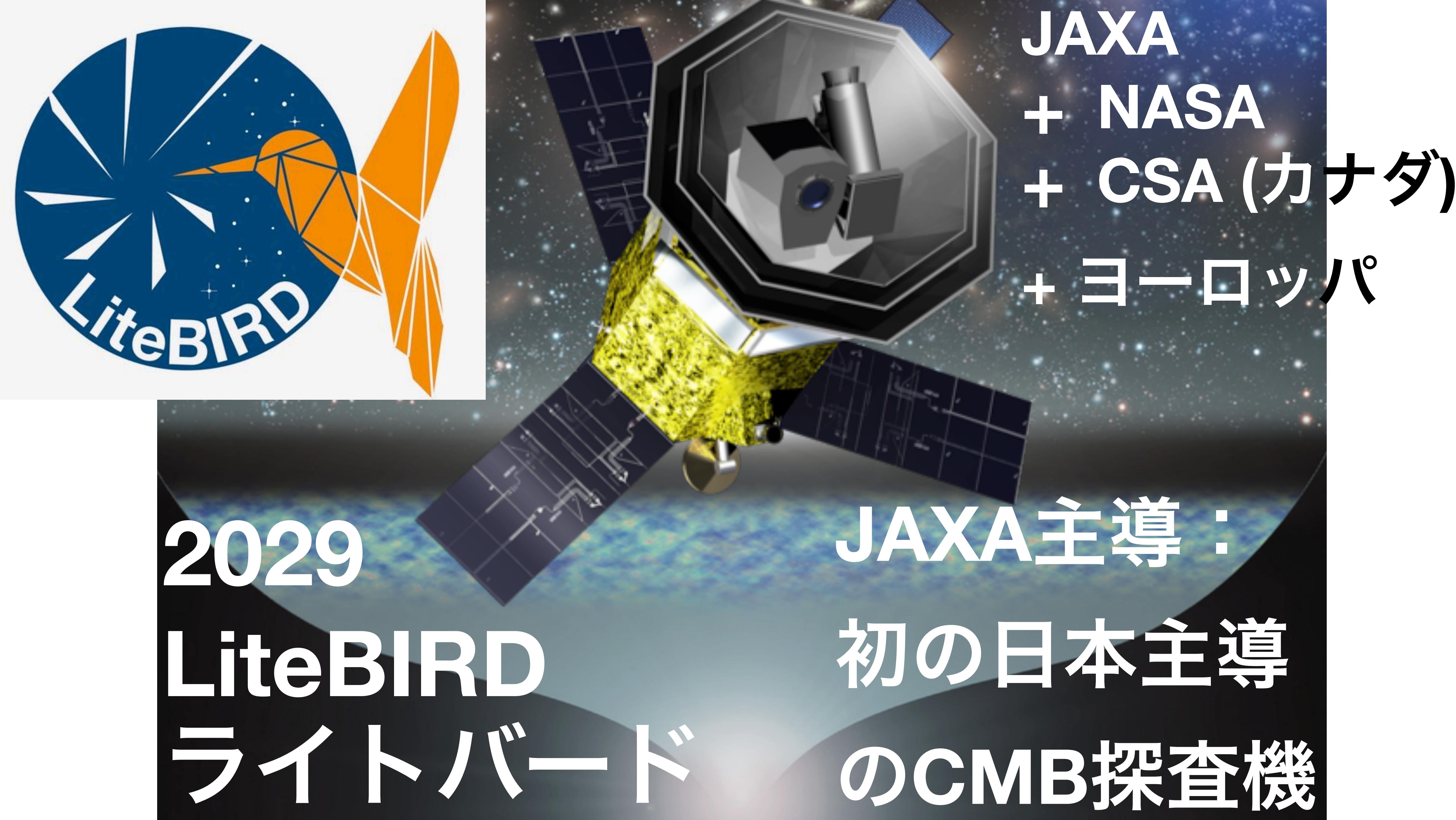
CLASS





みんなで力を合わせて  
CMBステージ4 (CMB S-4) ?  
総額600億円くらい！





2029

LiteBIRD  
ライトバード

JAXA主導：  
初の日本主導  
のCMB探査機

JAXA  
+ NASA  
+ CSA (カナダ)  
+ ヨーロッパ

# ソースからの原始重力波

$$\square D_{ij} = -16\pi G \boxed{\pi_{ij}^{GW}} \quad T_{ij} = a^2 \pi_{ij}$$

本来プレゼンでやっちゃいけないのですが、記号を変えます。

これ以降は、空間の歪みを  $h_{ij}$  ではなく  $D_{ij}$  と書きます。

# ソースの種類

スカラー型、ベクトル型、テンソル型

- ・ 時空が一様等方な時、ソースとなる場が**3次元空間座標の回転**に対してどのように変換するかで、以下のように分類する。

- ・ スピン0：スカラー型の場
- ・ スpin1：ベクトル型の場
- ・ スpin2：テンソル型の場

$$x^i \rightarrow x^{i'} = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j$$

# ソースの種類

スカラー型、ベクトル型、テンソル型

$$x^i \rightarrow x^{i'} = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j$$

- ・ 時空が一様等方な時、ソースとなる場が**3次元空間座標の回転**に対してどのように変換するかで、以下のように分類する。
  - ・ スピン0：スカラー型の場  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$
  - ・ スピン1：ベクトル型の場
  - ・ スピン2：テンソル型の場

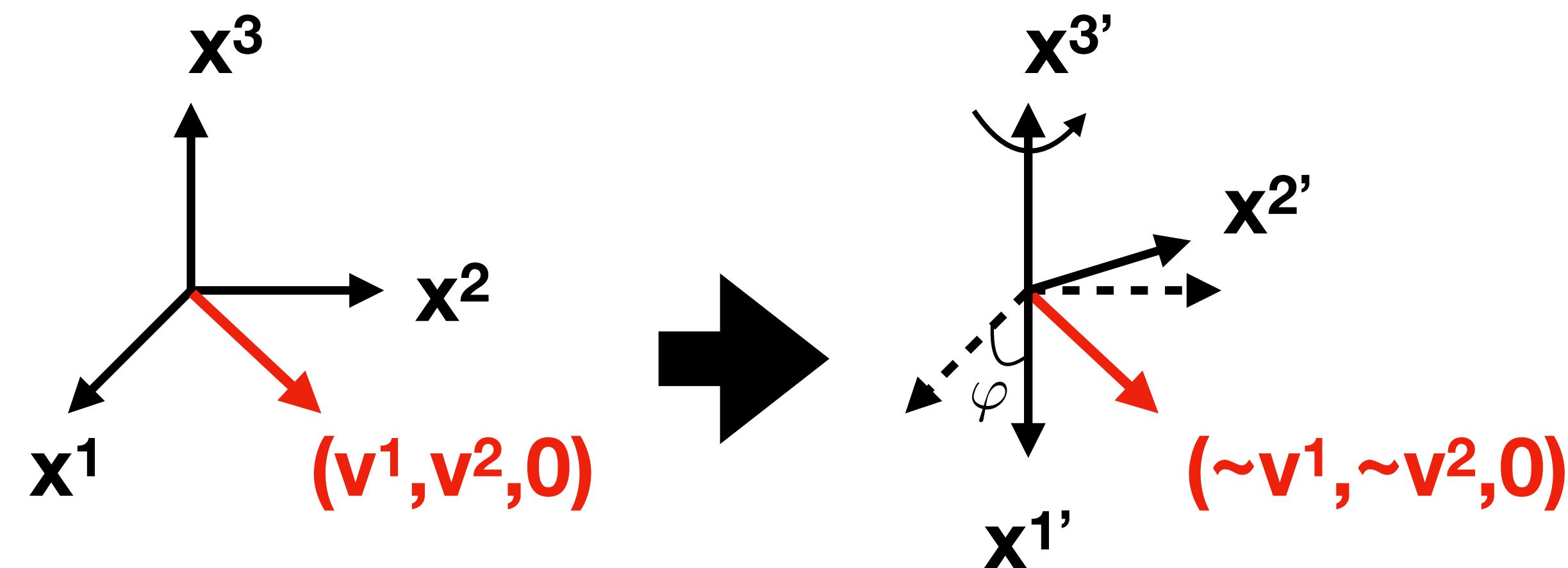
# ソースの種類

スカラー型、ベクトル型、テンソル型

$$x^i \rightarrow x^{i'} = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j$$

- 時空が一様等方な時、ソースとなる場が**3次元空間座標の回転**に対してどのように変換するかで、以下のように分類する。

- スピノン0：スカラー型の場
- スピノン1：ベクトル型の場
- スピノン2：テンソル型の場



$$(v^1 \pm i v^2)(\mathbf{x}) \rightarrow (\tilde{v}^1 \pm i \tilde{v}^2)(\mathbf{x}') = e^{\mp i \varphi} (v^1 \pm i v^2)(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

# ソースの種類

スカラー型、ベクトル型、テンソル型

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

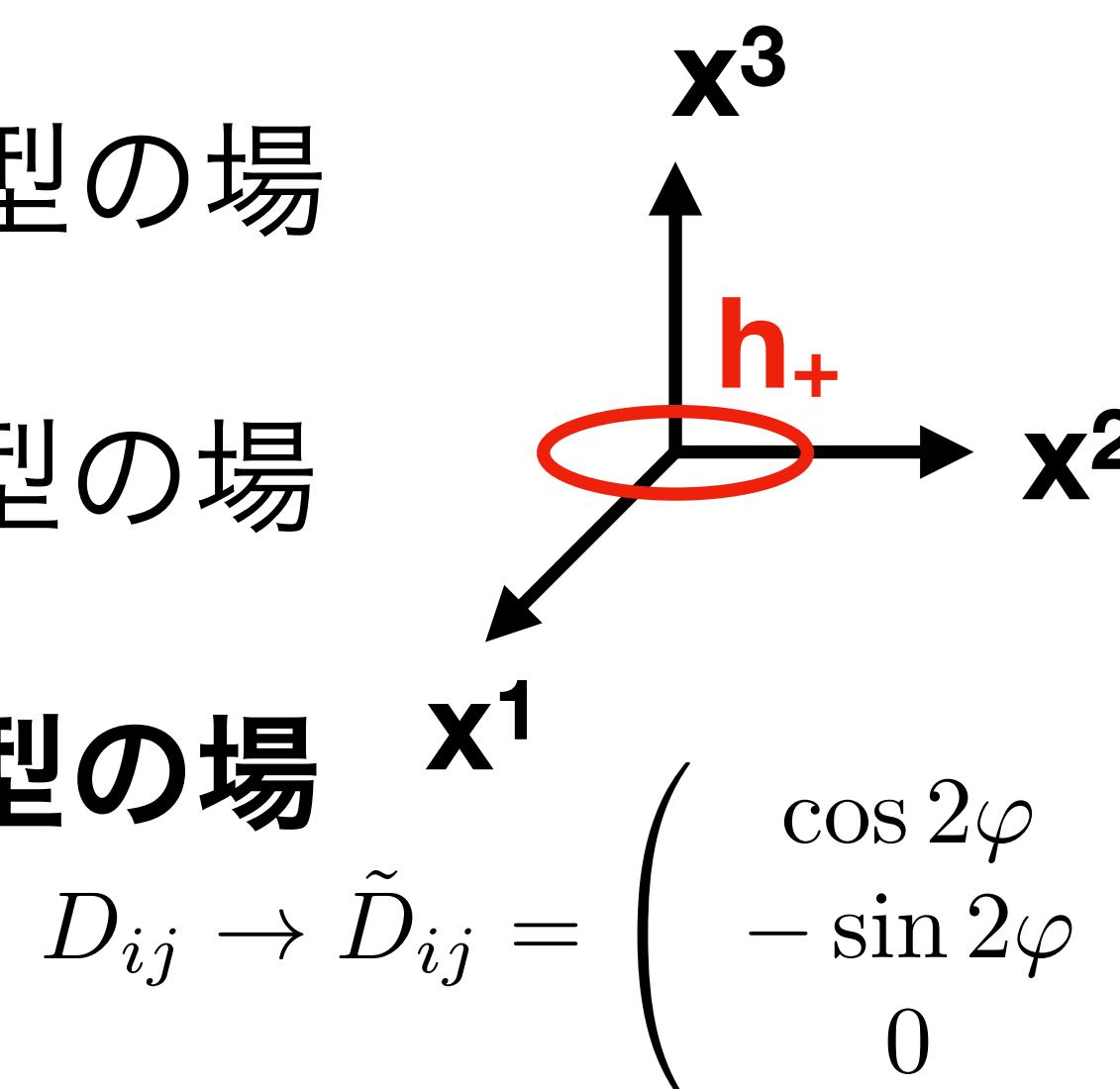
$$x^i \rightarrow x^{i'} = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j$$

- 時空が一様等方な時、ソースとなる場が**3次元空間座標の回転**に対してどのように変換するかで、以下のように分類する。

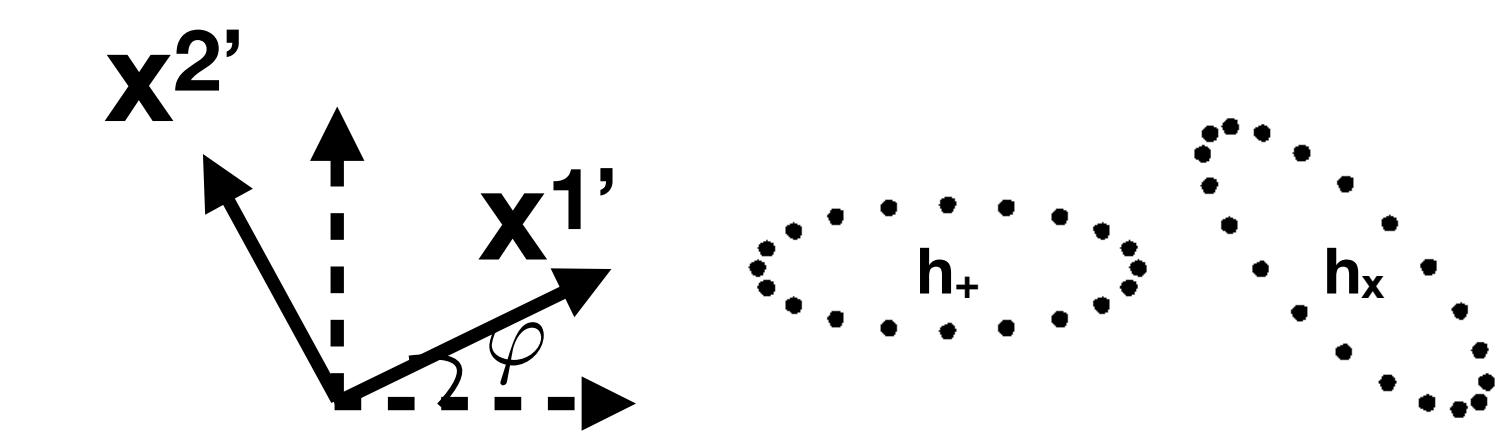
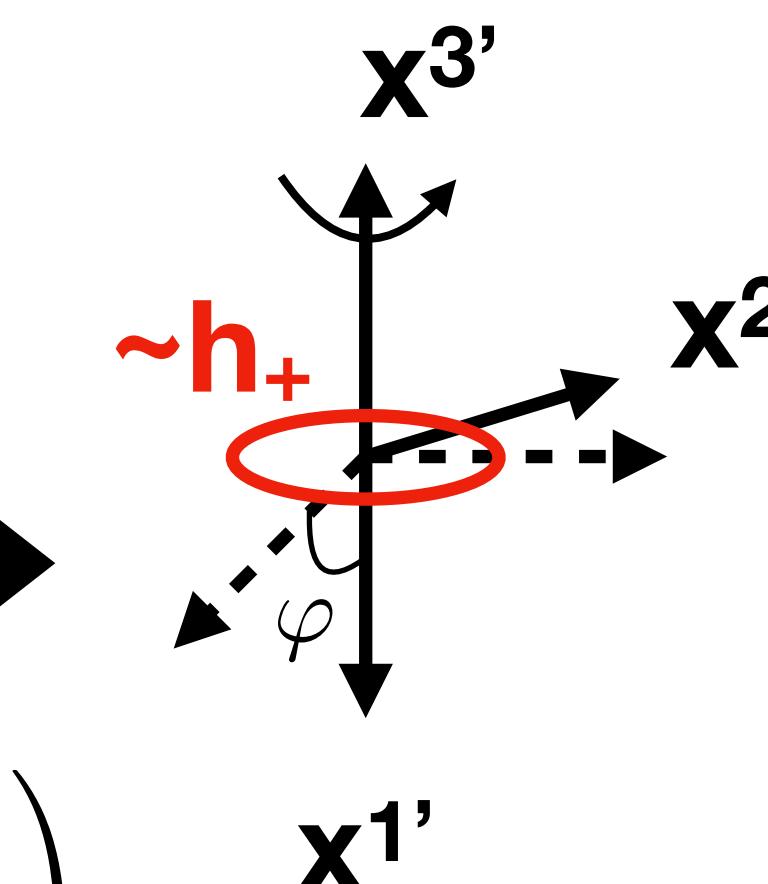
・スピン0：スカラー型の場

・スピン1：ベクトル型の場

・スピン2：テンソル型の場



$$D_{ij} \rightarrow \tilde{D}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D_{ij}$$



$$(h_+ \pm i h_\times)(\mathbf{x}) \rightarrow (\tilde{h}_+ \pm i \tilde{h}_\times)(\mathbf{x}')$$

$$= e^{\mp 2i\varphi_{\text{spin 2}}} (h_+ \pm i h_\times)(\mathbf{x})$$

# スカラー・ベクトル・テンソル分解定理

- 一様等方時空において、揺らぎの高次を考えない線形摂動理論では、**スカラー型・ベクトル型・テンソル型揺らぎの運動方程式は独立である。**
- 異なるスピンは混合しない。
- すなわち、線形摂動理論ではテンソル揺らぎ（重力波）は、スカラー型・ベクトル型の揺らぎから生成できない！
- 非一様等方時空や、高次の摂動（2次の摂動など）があれば、スカラー型・ベクトル型の揺らぎからテンソル揺らぎを生成できる。

# ソースありの重力波の運動方程式

作用からの導出

$$a^2 \square D_{ij} = -(2/M_{\text{pl}}^2) T_{ij}^{GW} \quad M_{\text{pl}} = (8\pi G)^{-1/2}$$

$$I = \int \sqrt{-g} d^4x \left( \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 R + \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{vector}} + \mathcal{L}_{\text{tensor}} \right)$$

$$\frac{\delta I}{\delta g^{ij}} = -\frac{1}{4} M_{\text{pl}}^2 \sqrt{-g} a^2 \square D_{ij} + (\text{2nd and higher order terms})$$

$$+ \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ij}} = 0$$
$$T_{ij} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ij}}$$

# スカラー場がソースの場合

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - V(\phi)$$

$$T_{ij}^\phi = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{ij}}$$

これは2次の摂動！  
 なぜなら：  
 $\phi(t, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x})$

$$= \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \frac{\partial\phi}{\partial x^j}} - g_{ij} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi) \right]$$

- $g_{ij}$ に比例する項は、重力波に寄与するトレースなしの成分  $T_{ij} - g_{ij}T/3$  には寄与しない。

# ベクトル場がソースの場合

例えば電磁場

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$T_{ij}^A = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_A}{\delta g^{ij}}$$

$$= \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} F_{i\mu} F_{j\nu} - \frac{1}{4} g_{ij} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$T_{ij}^A - \frac{1}{3} g_{ij} T^A = -a^2 (E_i E_j + B_i B_j) + \frac{1}{3} g_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$$

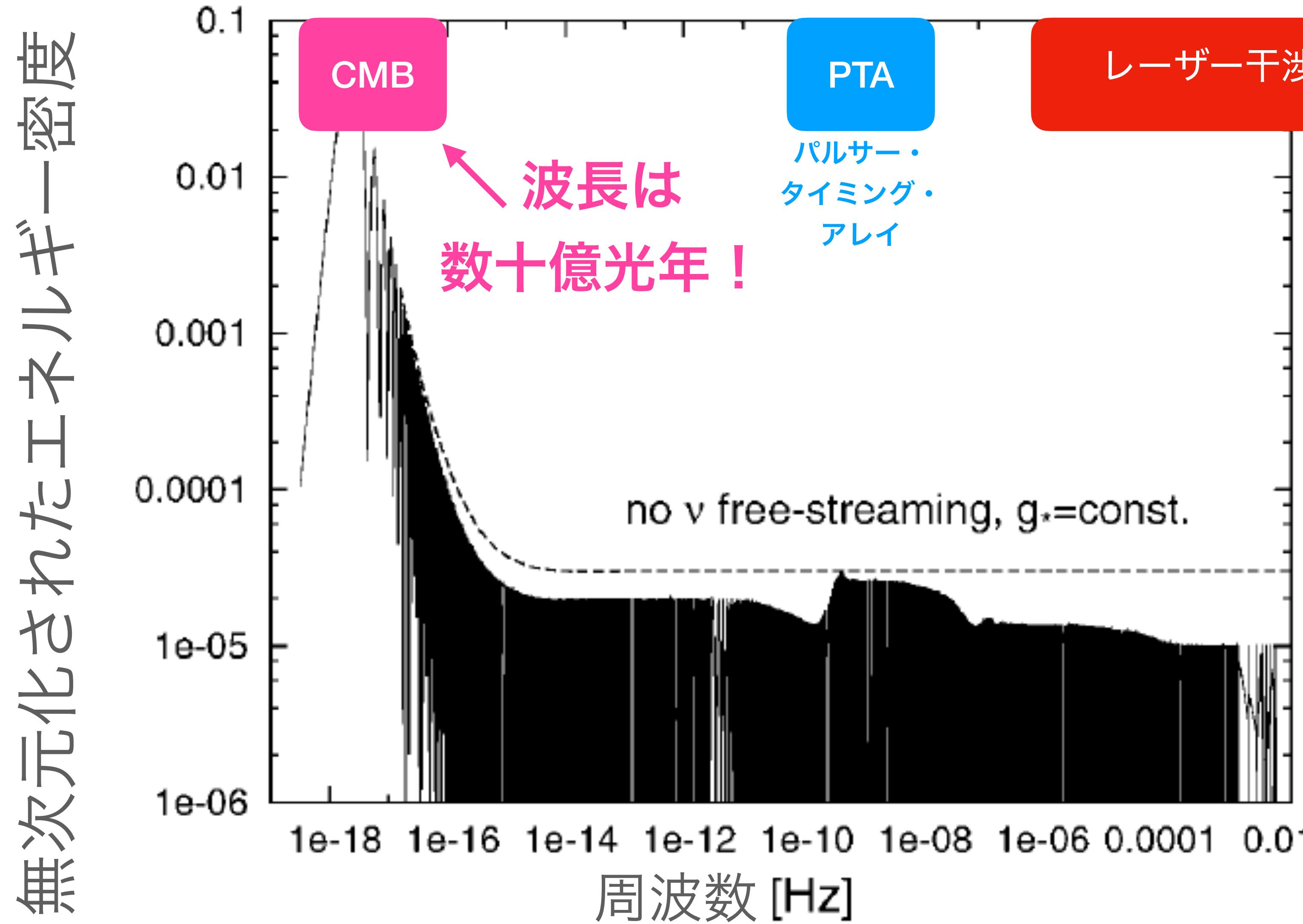
これは2次の摂動！ なぜなら、  
 $E_i$ や $B_i$ が一様な平均値を持つと  
等方時空ではなくなるため。

$$\begin{aligned} F_{i0} &= E_i, \\ F_{12} &= B_3, \\ F_{23} &= B_1, \\ F_{31} &= B_2 \end{aligned}$$

# 2次の摂動で何が悪い？

- スカラー場・ベクトル場の2次の摂動から原始重力波を出すことはできる。
- 真空の量子揺らぎ起源の原始重力波とは、全く異なるスペクトルを持つ。
- 非常に面白い分野！
- しかし、2次の摂動からは、テンソル型の揺らぎ（重力波）だけでなく、スカラー型の摂動も出る。1次の摂動がガウス分布をしていても、2次の摂動はガウス分布から大きくずれるため、宇宙マイクロ波背景放射の温度異方性が高精度でガウス分布に従うことと矛盾してしまう。
- 宇宙マイクロ波背景放射のスケールでなく、もっと周波数の高いところで出ると思えば良い。

# 真空の量子揺らぎによる寄与

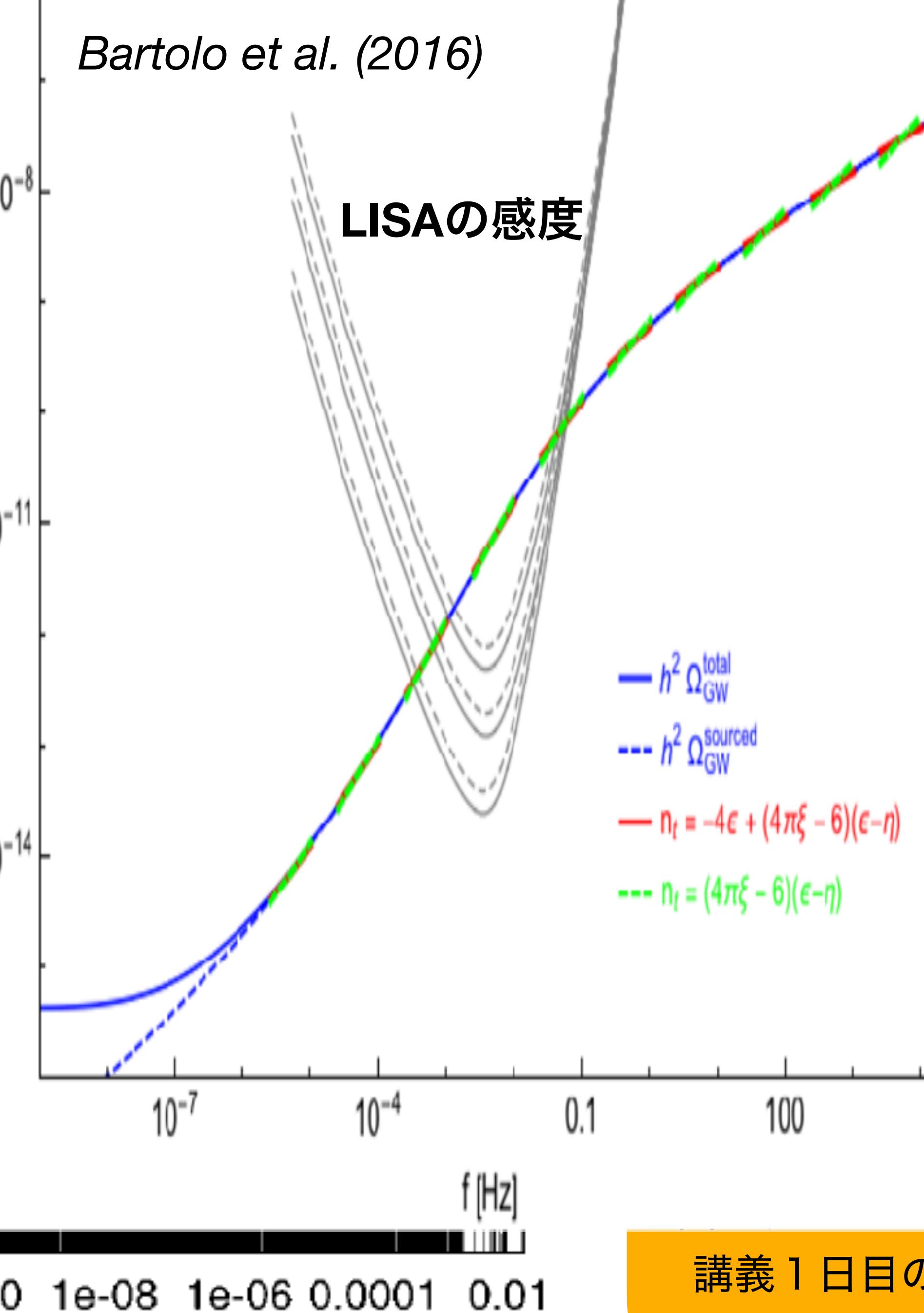
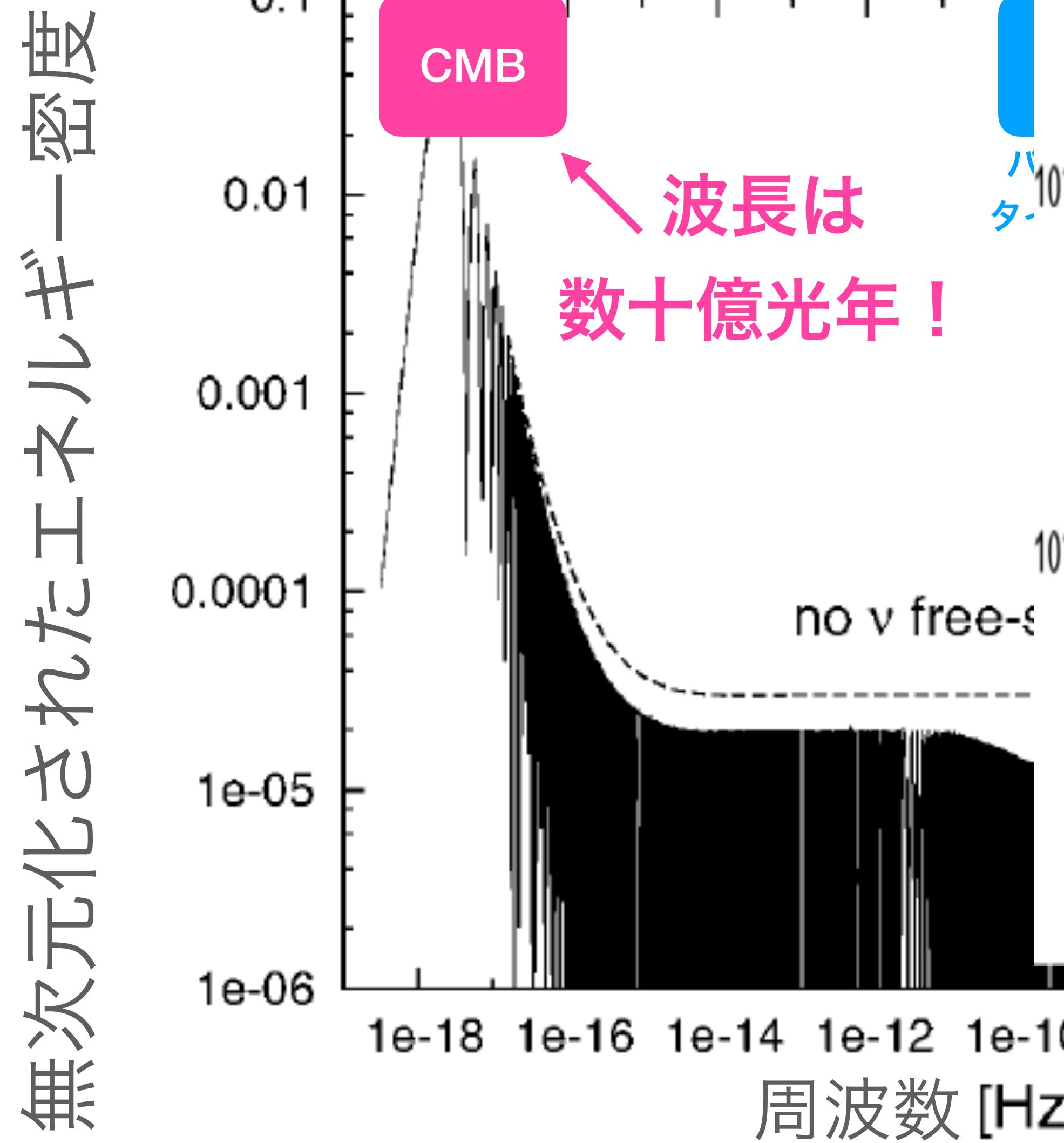


原始重力波は、  
ありとあらゆる  
波長で生成される。

波長に応じて、  
観測手法は異なる。

スペクトルがこのような形になる  
理由は、アムステルダム大学の集中  
講義1日目のスライドを参照

# ベクトル場の寄与！

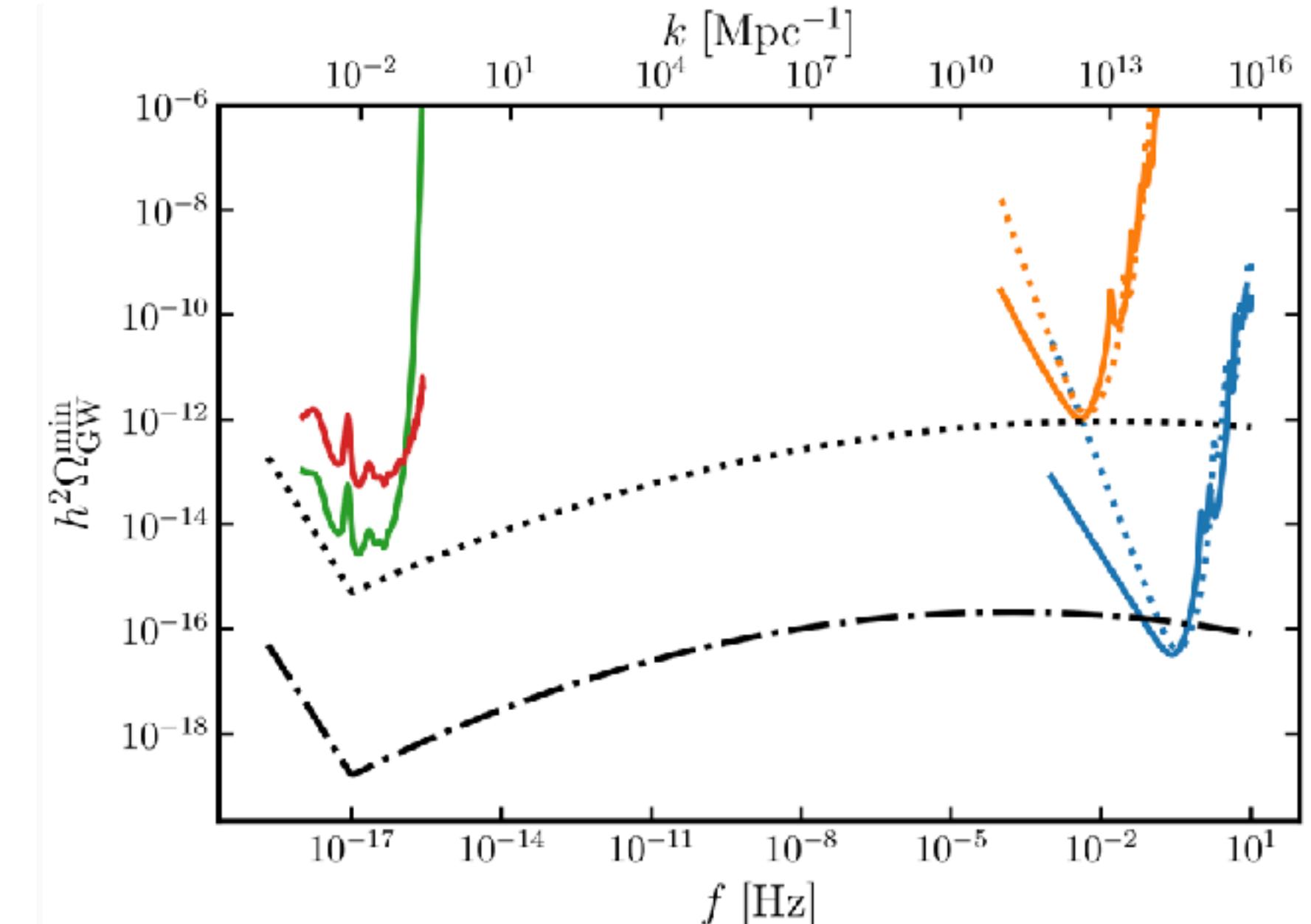


力波は、あらゆる成される。  
応じて、は異なる。

のような形になる  
ルダム大学の集中  
講義1日目のスライドを参照

# もっと楽しい分野

- そうは言っても、2次の摂動で重力波を出すのは、ヤクザな気がする。。
- 近年の理論的発見：一様等方時空で、1次の摂動で重力波を出すソースはある！
- それが、**SU(2)ゲージ場**。詳しくは、アムステルダム大学の集中講義3日目のスライドを参照。



# 最も伝えたいメッセージ

## 原始重力波発見の曉には、どうしたら良いか？

- 単一のスカラー場による最も単純なインフレーションモデルでは、原始重力波は必ず
- ほぼスケール不变なスペクトル
- ほぼガウス分布
- 円偏光はゼロ
- である。

- ・ 詳しくは、アムステルダム大学の集中講義3日目のスライドを参照

## 最も伝えたいメッセージ

原始重力波発見の曉には、どうしたら良いか？

- ・ 単一のスカラー場による最も単純なインフレーションモデルでは、原始重力波は必ず
- ・ ほぼスケール不变なスペクトル
- ・ ほぼガウス分布
- ・ 円偏光はゼロ
- ・ である。
- ・ しかし、ソースを起源とする原始重力波は、
  - ・ 全くスケール不变でないスペクトル
  - ・ 非ガウス分布の重力波
  - ・ ゼロでない円偏光
  - ・ を持つことができる。

これら全てをチェックしない限りは、「真空の量子揺らぎ起源の原始重力波を発見した」と、決して言ってはならない！！

# まとめ

## 初期宇宙のインフレーションは本当にあったのか？

- 個人的には、証拠は十分だと思う。しかし、インフレーション理論の途方もない主張には、途方もない証拠が必要 (*Extraordinary claims require extraordinary evidence*, Carl Sagan) なのかもしれない。
  - その「途方もない証拠」となりうるのが、インフレーション中に生成されたと予言される、**原始重力波**である。
- 現在のところ、原始重力波を発見する最有力な手法は宇宙マイクロ波背景放射のBモード偏光。世界中で観測プロジェクトが走っている。日本も重要なプレイヤー。
- 原始重力波は、AINシュタイン方程式の左辺（真空の量子揺らぎ）が起源なのか、それとも右辺（ソース）が起源なのか？
  - スケール不变性、ガウス分布、円偏光を見ることで、この両者を区別できる。今後の最重要課題。
  - 新しい理論的な仕事が大いにできる最先端分野でもある。あなたも、やってみませんか？